

LES COLLOÏDES DANS L'INDUSTRIE

LE CAOUTCHOUC

PRIX NET SANS MAJORATION :

Broché, 29 francs. — Reliure, 8 fr. 50 en sus.



LES COLLOÏDES DANS L'INDUSTRIE

LE
caoutchouc
CAOUTCHOUC

PAR

PAUL BARY

INGÉNIEUR E. P. C.

EX-CHEF DES TRAVAUX A L'ÉCOLE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE
ET AU LABORATOIRE CENTRAL D'ÉLECTRICITÉ

OUVRAGE HONORÉ D'UNE MÉDAILLE D'OR
PAR LA SOCIÉTÉ D'ENCOURAGEMENT A L'INDUSTRIE NATIONALE

PARIS

DUNOD, ÉDITEUR

47 ET 49, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS (VI^e)

1923

Tous droits de reproduction, de traduction et d'adaptation réservés pour tous pays
Copyright by Dunod 1923.

1484

678.2

N231

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE I

Les latex et leur coagulation.

	Pages.
Préliminaires.	1
Généralités.	3
Les latex.	8
Les sucres, les matières azotées et les enzymes du latex.	11
La coagulation du latex.	16
Influence des bases et des acides sur la coagulation.	23
Les résines.	24

CHAPITRE II

Propriétés chimiques du caoutchouc.

Constitution chimique.	29
État de polymérisation du caoutchouc.	36
Caractères de la polymérisation colloïdale.	40
Mode de polymérisation du polyprène.	43
Degré de polymérisation du polyprène.	45
Les isomères du caoutchouc.	49
Composés d'addition du polyprène.	53
Oxydation du caoutchouc.	60

CHAPITRE III

Propriétés physiques du caoutchouc.

Généralités.	63
Matériel pour les essais d'élasticité.	70
Essais des caoutchoucs par traction.	77
Essais d'allongement des caoutchoucs vulcanisés.	83
Hystérèse élastique du caoutchouc.	92
Variations thermiques accompagnant les déformations.	97
Essais d'écrasement.	99
Augmentation de volume sous la tension.	104
Le « nerf » des caoutchoucs naturels.	107
Gonflement du caoutchouc.	109
Dissolution des gaz dans le caoutchouc.	114
Dissolutions de caoutchouc.	118
Viscosité des solutions.	122

CHAPITRE IV

La vulcanisation.

Vulcanisation par le soufre.	131
Théorie de la vulcanisation au soufre.	139
Dissolution du soufre dans le caoutchouc.	144
État du soufre dans le caoutchouc.	152
Coefficient de vulcanisation.	154
Influence de la durée et de la température de la vulcanisation.	156
La réversibilité de la réaction caoutchouc-soufre.. . . .	162
Les catalyseurs minéraux	167
Les catalyseurs naturels.	173
Les catalyseurs organiques.	178
Mode d'action des catalyseurs.	181
La vulcanisation par le chlorure de soufre et par le sulfure d'antimoine.	191

CHAPITRE V

Caoutchoucs synthétiques et régénérés. — Produits de substitution.

Caoutchoucs artificiels.. . . .	199
Préparation de l'isoprène.	201
Hydrocarbures polymérisables.	210
Polymérisation des produits synthétiques.	215
Préparation du caoutchouc par les ferments.	217
Constitution des différents caoutchoucs synthétiques.. . . .	219
L'industrie des caoutchoucs artificiels.	221
Régénération du caoutchouc vulcanisé.	223
Régénération par les alcalis.	226
Régénération par dissolution.. . . .	231
Modes de séparation du soufre libre.. . . .	236
Les factices.	240
Les succédanés.	243
TABLE ALPHABÉTIQUE DES MATIÈRES.	247
TABLE DES NOMS D'AUTEURS.	251

CHAPITRE PREMIER

LES LATEX ET LEUR COAGULATION

Préliminaires.

1. Parmi les nombreuses substances colloïdales naturelles, le caoutchouc et la gélatine sont celles qui tiennent la plus grande place dans l'industrie ; le caoutchouc possède des propriétés d'élasticité et de résistance mécanique, qu'on sait faire varier en toutes proportions suivant les besoins et qui en font une matière qui n'a réellement pas de succédanés. Aussi, en dehors des produits ajoutés au caoutchouc, telles que les factices, pour en diminuer le prix de revient et aussi pour obtenir des qualités différentes, dont la quantité ne peut dépasser une certaine proportion, le caoutchouc est-il toujours nécessaire pour former la base des mélanges et toutes les tentatives faites pour y substituer un autre corps sont-elles restées sans résultat.

L'intérêt que trouveraient les industries chimiques à s'affranchir de cette matière première, qui n'est récoltée que dans les régions tropicales et dont le prix de revient a été à certaines époques excessivement élevé, a poussé les chimistes vers la synthèse du caoutchouc qui a été réalisée aujourd'hui, au moins au laboratoire, de bien des manières différentes.

Le réemploi des déchets de caoutchouc, après régénération plus ou moins complète de ses propriétés d'origine, est également une question qui a été travaillée et elle est entrée depuis longtemps dans la pratique courante.

Les résultats ainsi obtenus, tant dans la synthèse que dans la régénération du caoutchouc, ne pouvaient être atteints qu'avec une connaissance assez complète des propriétés physico-chimiques de la

substance naturelle qu'il s'agissait de reproduire ou de reconstituer. L'étude de ces propriétés a beaucoup aidé à la compréhension de la notion de la colloïdité et à sa généralisation à d'autres corps que ceux capables de se produire et d'évoluer dans des milieux conducteurs de l'électricité, où les théories d'ionisation et d'électrisation superficielle semblaient suffisantes pour résoudre tous les problèmes.

Aussi à côté de l'importance considérable de l'industrie du caoutchouc qui suffit à rendre son étude extrêmement utile, le bénéfice à en tirer est-il accru par les conséquences générales qui s'en peuvent déduire dans l'application à d'autres industries connexes telles que celle des matières isolantes.

2. Le point de vue spécial que nous avons à envisager dans ce livre est celui de la colloïdité et nous n'aurons à nous occuper que des caractères colloïdaux du caoutchouc, de la fonction qu'ils remplissent dans la dissolution, la vulcanisation, etc. ; nous ne traiterons donc pas la question d'ensemble qui a fait l'objet de nombreux et d'excellents traités que la présente monographie ne saurait prétendre à remplacer. La question complète de l'industrie du caoutchouc est extrêmement touffue ; elle s'étend depuis la culture des arbres producteurs de latex jusqu'à l'obtention des objets manufacturés si divers où le caoutchouc trouve son emploi ; presque chaque application : pneumatiques, chaussures, ébonite, etc., peut faire à elle seule l'objet d'un volume bien rempli. Notre étude ne doit pas comprendre toutes ces matières pour lesquelles nous renvoyons le lecteur aux ouvrages généraux et spéciaux qui le renseigneront complètement sur la culture des arbres à caoutchouc, le traitement des latex et applications industrielles du caoutchouc (1). Le programme que nous suivrons est

(1) Parmi les nombreux ouvrages traitant du caoutchouc, on peut citer :

E. Chapel, *Le caoutchouc*, Marchal et Billard, Paris, 1892.

H. Jumello, *Les plantes à caoutchouc et à gutta*, Paris, 1902.

Seeligmann, Lalmy-Torrillon et Falconnet, *Le caoutchouc et la gutta-percha*, Fritsch, Paris, 1906.

C.-O. Weber, *The Chemistry of India Rubber*, 3^e éd., Griffin et C^{ie}, Londres, 1909.

A. Heil et W. Esch, *Fabrication du caoutchouc*, traduit par E. Ackermann, Béranger, Paris, 1909.

A. Fayol, *Le caoutchouc*, Béranger, Paris, 1909.

E. Tassilly, *Caoutchouc et gutta-percha*, O. Doin, Paris, 1911.

à la fois plus général et plus restreint et bien que nous nous propositions de parler de la coagulation des latex, de la dissolution, des mélanges, de la vulcanisation, de la synthèse et de la régénération, c'est-à-dire de presque tout ce qui concerne le caoutchouc, nous n'aborderons chacun de ces sujets que sous le seul point de vue colloïdal ; on n'a pas encore fait ressortir d'ensemble l'extrême intérêt qu'il présente, non pas seulement pour les savants, mais pour les praticiens qui se croient trop souvent liés par des formules et des procédés que l'usage a enseignés et qui n'en peuvent sortir que difficilement par suite de l'absence des notions générales, d'un acquit d'ailleurs récent, qui unissent ces procédés entre eux et fournissent souvent le fil conducteur permettant de passer de ceux-ci à d'autres.

Généralités.

3. Les arbres à caoutchouc qui produisent un latex de qualité convenable pour l'exploitation sont d'espèces assez diverses. Ils appartiennent à six familles botaniques principales : *euphorbiacées*, *artocarpées*, *apocynacées*, *asclépiadées*, *sapotacées* et *moracées*. Ils ne donnent pas tous des produits de même qualité.

Les *euphorbiacées* sont les plus remarquables par le genre *hevea* et spécialement l'*hevea brasiliensis* dont on tire le caoutchouc dit



Fig. 1. — *Hevea Brasiliensis*.

P. Schidrowitz, *Rubber*, Methuen et C^{ie}, Londres, 1911.

L. Ventou-Duclaux, *Les caoutchoucs artificiels*, Dunod, Paris, 1912.

A. Dubosc et A. Luttringer, *Le caoutchouc, sa chimie nouvelle, ses synthèses*, A.-D. Cillard, Paris, 1918.

R. de Fleury, *Technologie du caoutchouc souple*, Dunod, Paris, 1910.

DIE MATHEMATISCHEN HILFSMITTEL DES PHYSIKERS

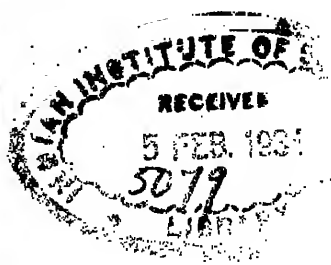
VON

DR. ERWIN MADELUNG

ORD. PROFESSOR DER THEORETISCHEN PHYSIK
AN DER UNIVERSITÄT FRANKFURT A. M.

ZWEITE VERBESSERTE AUFLAGE

MIT 20 TEXTFIGUREN



BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1925

15079

ALLE RECHTE, INSBESONDERE
DAS DER ÜBERSETZUNG IN FREMDE SPRACHEN, VORBEHALTEN.

COPYRIGHT 1925 BY JULIUS SPRINGER IN BERLIN

510

N23.4/1

Vorwort zur ersten Auflage.

Die Veranlassung zur Niederschrift dieses Buches entsprang einem persönlichen Bedürfnis. Ursprünglich war das Material für den eigenen Gebrauch bei Untersuchungen und Vorlesungen gesammelt, um das dauernde Nachschlagen in den verschiedensten Lehrbüchern zu ersparen. Als ich mich dann auf das Zureden befreundeter Fachkollegen hin entschloß das Vorhandene nach Möglichkeit zu ergänzen und in die Form eines Buches zu bringen, glaubte ich, daß das von mir Gesammelte auch für andere nützlich sein könnte. Es schwebte mir dabei als Ideal vor, ein Buch zu verfassen, das als theoretisches Analogon zu dem bekannten Buche von Kohlrausch aufgefaßt werden könnte. Je weiter ich mit der Bearbeitung des Materials fortschritt, um so deutlicher wurde mir freilich, daß sich dieses Ideal zunächst nicht würde erreichen lassen, und daß es in mancher Richtung besser gewesen wäre, wenn dieses Buch nicht von einem, sondern von mehreren Physikern und Mathematikern geschrieben würde. So verlockend es gewesen wäre auf diese Weise etwas Vollkommenes in die Wege zu leiten, so habe ich doch endgültig davon abgesehen die Aufgabe zu teilen, in der Erwägung, daß ein Buch, das für den praktischen Gebrauch der Physiker bestimmt ist, auch wenn es wesentlich Mathematik enthält, nur von einem Physiker verfaßt sein darf, und daß bei einer Verteilung der Aufgabe auf mehrere Mitarbeiter die Homogenität zu sehr gelitten hätte. Ich hege die Hoffnung, daß, nachdem das Buch einmal in einem bestimmten Charakter geschrieben vorliegt, zu einer späteren Zeit durch die Mitarbeit von mehreren Fachkollegen die vorhandenen Mängel ausgeglichen werden.

Für die Auswahl des Stoffes war für mich bestimmend, daß das Buch alles enthalten sollte, was der rechnende Physiker an Grundlagen und Methoden braucht, soweit er nicht zum Zurückgreifen auf Spezialarbeiten genötigt sein sollte. Dabei ist grundsätzlich, um den Umfang des Buches zu beschränken und aus andern naheliegenden Gründen alles fortgelassen, was als „trivial“ bezeichnet werden darf und was sich in handlicher Form vereinigt in vorhandenen Formelsammlungen z. B. der von Bürklen (Sammlung Göschen) vorfindet. Andererseits ist nach oben eine bestimmte Grenze nicht gezogen, viel-

mehr möglichst alles an Mathematik berücksichtigt, was nach meinem Urteil für die Behandlung physikalischer Probleme bisher verwandt worden ist oder Aussicht auf Verwendung bietet.

Die Darstellung bringt fast durchweg nur die Definitionen der Grundbegriffe, die Ansatzbildungen und die Resultate. Beweise sind nur an einzelnen Stellen angedeutet. Die Bezeichnungen schließen sich nach Möglichkeit den üblichsten an. Hier eine bestimmte Auswahl zu treffen war oft schwierig. Zu Abweichungen vom Üblichen war ich in einzelnen Fällen gedrängt, um die Darstellung einheitlicher zu gestalten.

Dem rein mathematischen ersten Teil schließt sich ein physikalischer an. Dieser zweite Teil sollte ursprünglich nur eine Sammlung von Anwendungsbeispielen des ersten enthalten. Ich habe ihn soweit ergänzt, daß er in sich eine gewisse Geschlossenheit besitzt. In ihm sind die Grundbegriffe der theoretischen Physik bzw. deren mathematische Formulierung und Begriffsbildung dargestellt.

Besonderes Gewicht habe ich auf die Vektor- und Tensorrechnung gelegt. Ich halte diese Disziplin für eines der allerwichtigsten mathematischen Hilfsmittel des Physikers. Ich bin der Ansicht, daß sie wegen ihrer großen Anschaulichkeit mehr ist als eine kürzere Schreibweise und daß ihre eingehende Kenntnis gleichzeitig die Vertrautheit mit anderen wichtigen mathematischen Disziplinen, wie Invariantentheorie, Differenzialgeometrie usw. mit sich bringt, wenigstens soweit diese für die Physik von Bedeutung sind. Dementsprechend habe ich mich in der Darstellung der physikalischen Grundlagen in einem höheren Maße als meist üblich der Vektoren- und besonders der Tensorenrechnung bedient.

Ich übergebe das Buch der Öffentlichkeit mit großen Bedenken, hoffe aber, daß es sich trotz vieler Mängel als nützlich erweisen wird und daß die Fachkollegen bemerken werden, daß das Ganze nicht bloß durch Zusammenschreiben aus den verschiedensten Lehrbüchern entstanden ist, sondern daß auch an vielen Stellen Ergebnisse eigener Bemühungen eingestreut sind. Ich habe einer größeren Anzahl von Kollegen für ihre Hilfe zu danken, die sie mir teils durch kleinere Beiträge, teils durch Beratung, teils durch Durchsicht des Manuskriptes, sowie der Korrekturen geleistet haben. Besonders danke ich den Herren Courant, Baule, Landé, Epstein, Bessel-Hagen, Brody und Götze.

Frankfurt a. M., September 1922.

Erwin Madelung.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Die vorliegende zweite Auflage unterscheidet sich von der ersten durch eine Reihe von kleineren Korrekturen teils sachlicher, teils stilistischer Art, sowie durch einige Zusätze. Solche Zusätze betreffen u. a.: die Verwendung einer Greenschen Funktion, Randwertaufgaben, Tensoranalysis, Theorie des Kreisels, allgemeine Relativitätstheorie und Quantentheorie. Der Charakter des Buches ist im übrigen unverändert geblieben. Auf einen von mathematischer Seite geäußerten Wunsch hin wurden einige Umstellungen in der Reihenfolge der Kapitel vorgenommen.

Ich danke allen Kollegen, die mich durch ihre Kritik auf Schwächen und Versehen in der ersten Auflage aufmerksam gemacht haben.

Im besonderen danke ich den Herren Kollegen Courant-Göttingen und Lanczos-Frankfurt für ihre Unterstützung beim Lesen der Korrekturen.

Frankfurt a. M., Juli 1925.

Erwin Madelung.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung	Seite 1
----------------------	------------

Erster Abschnitt.

Algebra.

A. Lineare Gleichungssysteme	3
B. Matrizen und Determinanten	
1. Definitionen	6
2. Multiplikation von Determinanten	8
3. „Änderung“ von Determinanten	8
4. Praktische Berechnung von Determinanten	9
5. Spezielle Determinanten	9
6. Determinanten und lineare Gleichungssysteme	10
C. Kombinatorik	11

Zweiter Abschnitt.

Differential- und Integralrechnung.

1. Differentiationstabelle	13
2. Differentiations-Regeln	14
3. Umformung von Differentialausdrücken	14
4. Integrationsmethoden	16
5. Integrationstabelle	18
6. Bestimmte Integrale	20
7. Differenzenrechnung	22

Dritter Abschnitt.

Reihen.

1. Grundbegriffe	25
2. Konvergenzkriterien	25
3. Wichtige Reihen	26
4. Summation von Reihen	26
5. Fouriersche Reihen	29
6. Fouriersches Integral	30
7. Zweidimensionale Fouriersche Reihen und Integrale	31

Vierter Abschnitt.

Funktionen.

A. Allgemeine Funktionentheorie	
1. Komplexe Größen	33
2. Analytische Funktionen	34

	Seite
3. Cauchys Fundamentalformel	35
4. Potenzreihenentwicklung der analytischen Funktionen	
a) Entwicklung in der Umgebung regulärer Punkte	36
b) Entwicklung in der Umgebung nicht regulärer Punkte	40
5. Berechnung bestimmter Integrale durch Integration im Komplexen	41
6. Veranschaulichung komplexer Funktionen	43
B. Spezielle Funktionen	
1. Klassifikation der Funktionen	47
2. Rationale Funktionen	47
3. Nicht rationale algebraische Funktionen	50
4. Transzendente Funktionen	
1. Exponentialfunktion und Logarithmus	50
2. Trigonometrische Funktionen	51
3. Hyperbolische Funktionen	53
4. Zusammenhang zwischen verschiedenen transzendenten Funktionen	53
5. Berechnung einiger transzendenten Funktionen durch unendliche Reihen	54
5. Kugelfunktionen	
a) Legendresche oder „einfache“ Kugelfunktionen	54
b) Kugelfunktionen zweiter Art	58
c) Allgemeine Kugelfunktionen	59
d) Zugeordnete Kugelfunktionen	61
e) Integralsätze	61
f) Entwicklung nach Kugelfunktionen	62
6. Zylinderfunktionen	
a) Definitionen	63
b) Zylinderfunktionen 2. Art	64
c) Allgemeine Beziehungen	65
d) Die allgemeine Lösung der Besselschen Differentialgleichung	66
e) Spezielle Werte von Zylinderfunktionen	66
f) Grenzwerte für kleines z	67
g) Negativer Parameter	67
h) Asymptotische Werte für große Werte des Arguments z	69
i) Entwicklung nach Zylinderfunktionen	69
7. Gammafunktion	70
8. Elliptische Integrale und Funktionen	71

Fünfter Abschnitt

Transformationen.

A. Allgemeines über Transformationen	
1. Bedeutung einer Transformation	76
2. Spezielle Transformationen	
a) Lineare Transformation	77
b) Orthogonale Transformationen	79
c) Infinitesimale Transformationen	79
3. Transformations-Determinante	80
4. Invarianten	81
B. Koordinaten-Systeme und Koordinaten-Transformationen	
a) Ebene Koordinaten-Systeme	82
b) Räumliche Koordinaten-Systeme	83

	Seite
1. Das Cartesische Koordinaten-System	83
2. Räumlich schiefwinklige Koordinaten-Systeme (affine K.-S.)	85
3. Sphärische Polarkoordinaten	86
4. Zylindrische Polarkoordinaten	86
5. Elliptische Koordinaten	87
6. Parabolische Koordinaten: ξ, η, ψ	90
C. Berührungstransformation (Kontakttransformation)	
1. Im Zweidimensionalen	91
2. Im Mehrdimensionalen	96

Sechster Abschnitt.

Differentialgleichungen.

A. Allgemeines über Differentialgleichungen	
1. Einteilung der Differentialgleichungen	99
2. Lösungen von Differentialgleichungen	100
a) Gewöhnliche Differentialgleichungen	101
b) Partielle Differentialgleichungen	101
B. Gewöhnliche Differentialgleichungen	
1. Differentialgleichungen 1. Ordnung	102
2. Lineare Differentialgleichungen	107
a) Allgemeine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten	108
b) Allgemeine lineare Differentialgleichung mit veränderlichen Koeffizienten	110
3. Besondere Formen von Differentialgleichungen	112
4. Lineare Differentialgleichung 2. Ordnung	114
5. Systeme von Differentialgleichungen (simultane Differentialgleichungen)	121
6. Totale Differentialgleichungen (Pffafsche Gleichungen)	124
C. Partielle Differentialgleichungen	
1. Verschiedene Arten partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung	126
2. Partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung	
a) Die in den 2. Ableitungen lineare Gleichung	127
b) Methode der Separation der Variablen	128
c) Randwertaufgaben	134
d) Riemanns Integrationsmethode	135

Siebenter Abschnitt.

Lineare Integralgleichungen	138
---------------------------------------	-----

Achter Abschnitt.

Variationsrechnung	142
------------------------------	-----

Neunter Abschnitt.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

A. Grundbegriffe	147
B. Schwankungen	148
C. Mittelwertbildung	150
D. Wahrscheinlichkeitsnachwirkung	150

Zehnter Abschnitt.

Vektoranalysis.

A. Koordinatenfreie Formulierung der Vektoranalysis

1. Definitionen	152
2. Vektoralgebra	153
3. Integral- und Differentialausdrücke	154
4. Allgemeine Formeln	156
5. Bemerkung zu den Symbolen	157
6. Spezielle Vektorfelder	158
7. Der Vektor \mathbf{r}	159
8. Unstetige Vektorfelder	160
9. Vektorgleichungen	162
10. Lineare Vektorfeldfunktion	162
11. Tensoren (zweiten Grades)	163
12. Der Gradiententensor	167
13. Tensoren höheren Grades	168
14. Transformation von Vektoren auf bewegtes Bezugssystem	168
15. Komplexe Vektoren	169

B. Koordinatenmäßige Formulierung der Vektoranalysis im n -dimensionalen Raume

1. Vektorkomponenten	170
2. Tensorkomponenten	172
3. Tensoren höheren Grades	173
4. 3-Indices-Symbole	173
5. Transformationen	173
6. Verjüngung und Erweiterung	174
7. Erweiterung und Verjüngung in Anwendung auf den Tensor g_{ik}	176
8. Orthogonale Koordinaten im 3-dimensionalen Raum	177
9. Komponenten in Cartesischen Koordinaten	180
10. Komponenten in Polarkoordinaten (r, φ, θ)	182
11. Komponenten in Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z)	183

Elfter Abschnitt.

Mechanik.

A. Prinzipien der Mechanik

1. Differentialprinzipien

a) Newtonsche Bewegungsgleichungen	185
b) Lagrangesche Bewegungsgleichungen 1. Art	185
c) Das Prinzip des kleinsten Zwanges (Gauß)	186
d) Das Prinzip der virtuellen Verrückungen	186
e) Das Prinzip von d'Alembert	187

2. Integralprinzipien

a) Das Prinzip von Hamilton	187
b) Das Prinzip der kleinsten Wirkung	188
c) Das Prinzip von Jacobi	188
d) Die kanonischen Bewegungsgleichungen (Hamilton)	189
e) Die Jacobische partielle Differentialgleichung	189

B. Mechanik des einzelnen Massenpunktes

1. Grundgesetz und Begriffe	190
2. Verschiedene Formen des Grundgesetzes	191

	Seite
C. Systeme von Massenpunkten	
1. Allgemeines	19
2. Formale Zurückführung auf die Dynamik eines Massenpunktes	19
3. Grundlagen der statistischen Mechanik	19
4. Gleichgewichtslagen und Schwingungen	19
D. Starrer Körper	19
E. Mechanik der Kontinua	
1. Kinematik	20
2. Kräfte	20
3. Elastizitätstheorie	20
4. Übergang zur Hydrodynamik	20
5. Hydrodynamik	20

Zwölfter Abschnitt.

Elektrizitätslehre.

1. Elektrostatik	212
2. Elektrokinetik	214
3. Magnetostatik	215
4. Elektromagnetismus	215
5. Elektrodynamik	216
6. Elektrodynamik quasistationärer Ströme	218
7. Elektronentheorie	218
8. Elektromagnetische Wellen (Grundlagen der Optik)	221
9. Wellen in anisotropen Medien (Kristalloptik)	222
10. Elektrische Maßsysteme	226

Dreizehnter Abschnitt.

Relativitätstheorie.

A. Grundbegriffe	
1. Maßsysteme	228
2. Dimensionen	229
B. Vierdimensionale Darstellung der Welt und Relativitätsprinzip	229
C. Lorentztransformation	230
D. Physikalische Bedeutung vierdimensionaler Vektoren und Tensoren	234
E. Elektrodynamik	236
F. Elektrodynamik in (bewegten) Medien	237
G. Dynamik der Masse	239
H. Allgemeine Relativitätstheorie	240

Vierzehnter Abschnitt.

Thermodynamik.

A. Grundbegriffe	244
B. Hauptsätze	245
C. Zustandsvariablen	247
D. Koeffizienten	248
E. Spezialfälle	
1. Ideale Gase	249
2. Gemische idealer Gase	250
3. Hohlraumstrahlung	251

	Seite
F. Prozesse	252
G. Zustandsgleichung	253
H. Vollständige Systeme	254
J. Spezielle Gleichgewichte	256
K. Phasentheorie	257
L. Massenwirkungsgesetz	258
M. Dritter Hauptsatz der Thermodynamik	259

Anhang

Quantentheorie.

Quantenmechanik	262
Quantenelektrodynamik	264

Einige physikalische Anwendungen der
Wahrscheinlichkeitsrechnung.

1. Verteilungswahrscheinlichkeit	265
2. Brownsche Bewegung	266
3. Geschwindigkeitsverteilung eines idealen Gases	267
4. Zeitliche und räumliche Gesamtheiten	269
5. Statistische Wahrscheinlichkeit	269
Tabellen	273
Namen- und Sachverzeichnis	280



Einleitung.

Dem rechnenden Physiker, im speziellen dem „Theoretiker“ bieten sich die Probleme zumeist in der Form, daß er von mehr oder weniger einfachen Voraussetzungen ausgehend unter Verwendung gegebener Gesetze die Konsequenzen sucht.

Es handelt sich hierbei zunächst darum, die Voraussetzungen zu formulieren, d. h. in mathematischer Form auszudrücken. Hierfür können keine Vorschriften gegeben werden. Nächste der Konzeption des Problems ist die Formulierung der Teil der Arbeit, der die größte Anforderung an die spezifischen Qualitäten des Forschers stellt. Das weitere ist Sache des mathematischen Könnens bzw. Wissens. Es ist, soweit nicht neue Methoden gefunden werden müssen, etwas fast Handwerksmäßiges. Zum Schlusse folgt wieder die Übersetzung des mathematisch gefundenen Ergebnisses in die physikalische Denkform.

Zwei Dinge sind dabei besonders zu beachten. Erstens muß in der Regel das Problem so weit vereinfacht werden, daß die mathematischen Hilfsmittel zur Bewältigung ausreichen. Eine Übersicht über die Methoden und deren Tragweite ist daher unbedingt erforderlich. Sie kann nur durch das Studium fremder Arbeiten, sowie durch Erfahrung bei eigenen Bemühungen gewonnen werden. Zweitens muß eine eingehende Betrachtung darüber angestellt werden, bis zu welchem Grade die Vereinfachung der Voraussetzungen den Wert des Resultates beeinträchtigt. Ohne eine derartige Kritik bleibt der Wert jeder theoretischen Untersuchung zweifelhaft.

Die Form der Lösungen, wie sie die üblichen mathematischen Hilfsmittel geben, ist durchaus nicht immer unmittelbar verwendbar. In denjenigen Fällen, in denen das Ergebnis praktisch verwertet werden soll, ist es nötig, daß bei zahlenmäßig gegebenen Voraussetzungen auch eine zahlenmäßige Auswertung des Resultats mit der erforderlichen Genauigkeit in hinreichend kurzer Zeit durchführbar ist. Daher ist es wünschenswert, daß möglichst nur solche funktionale Abhängigkeiten im Resultat stehen, welche mit Hilfe der niederen Rechenoperationen und mit Benutzung von vorhandenen Funktionstabellen berechnet werden können. Andernfalls müssen die Hilfsmittel der sogenannten „praktischen Analysis“, d. h. graphische und numerische Methoden, benutzt werden. Auf diese Methoden ist in

dem vorliegenden Buch nicht eingegangen, weil die nötigen Anweisungen ein Zusammendrängen auf so kleinen Raum nicht gestatten. Es sei hier verwiesen z. B. auf die Lehrbücher: *Runge-König*: Numerisches Rechnen (Berlin: Julius Springer); *Bruns*: Grundlinien des wissenschaftlichen Rechnens (Leipzig: B. G. Teubner); *v. Sanden*: Praktische Analysis (Leipzig: B. G. Teubner); *Whittaker-Robinson*: The calculus of observations (London: Blackie and Son), und viele andere mehr.

Algebra.

Die allgemeine Form für n lineare Gleichungen mit n Unbekannten ist

$$(1) \quad \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}$$

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Deutet man die Größen b_i als Komponenten eines Vektors \mathfrak{b} im n -dimensionalen Raum und ebenso die x_i als Komponenten eines Vektors \mathfrak{x} , so ist (4) symbolisch zu schreiben durch

$$Ax = b.$$

\mathfrak{A} bedeutet hierbei einen „Tensor“, der die Zuordnung der Vektoren x und h definiert:

1. Sind alle $b_i = 0$, so heißt das Gleichungssystem *homogen*.

Homogene lineare Gleichungssysteme haben dann und nur dann ein von 0 verschiedenes Lösungssystem ξ_h , d. h. $\sum_k a_{ik} \xi_k = 0$ für mindestens ein $\xi_k \neq 0$, wenn die Determinante der Koeffizienten

$$(2) \quad |a_{ik}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} = 0$$

ist. Das Lösungssystem ist dann bis auf einen Faktor bestimmt durch $\xi_1 : \xi_2 : \dots : \xi_n = A_{11} : A_{12} : \dots : A_{1n}$, wo A_{1k} die Unterdeterminanten (vgl.

²⁾ Betreffs der vektoranalytischen Begriffe vgl. S. 152ff.

S. 7) zu a_{ik} sind und i ein beliebiger Index ($i = 1$, oder $i = 2, \dots$) ist für mindestens ein $A_{ik} \neq 0$. $n - l$ unabhängige Lösungssysteme $\xi_k^{(h)}$ ($h = 1, 2, \dots, n - l$) liegen vor, wenn $|a_{ik}|$ vom Range $l < n$ ist, d. h. wenn nicht alle Unterdeterminanten l -ten, aber alle höheren Grades verschwinden. Jedes System linearer Kombinationen $\sum_k c_k \xi_k^{(h)}$

mit beliebigen c_k ist dann wieder ein Lösungssystem.

Das Verschwinden von $|a_{ik}|$ bedeutet, daß, wenn ξ beliebige Werte annimmt, $\mathfrak{A}\xi$ immer in einer Ebene $(n - 1)$ -ten Grades liegt, speziell in einer solchen l -ten Grades, wenn $|a_{ik}|$ vom Rang $l < n$ ist.

Für jeden Vektor ξ senkrecht zu dieser Ebene wird $\mathfrak{A}\xi = 0$.

Das *transponierte* homogene Gleichungssystem (entstanden durch Ersetzung von a_{ik} durch a_{ki}) hat ebenso viele Lösungssysteme $\xi_i^{(h')}$ wie das ursprüngliche.

Nennen wir den durch Transposition gebildeten Tensor \mathfrak{A}' , so wird $(\xi \mathfrak{A}') = (\xi' \mathfrak{A})$ (vgl. S. 163).

2. *Inhomogen* heißt das Gleichungssystem, wenn nicht alle $b_i = 0$ sind.

Fall a. Ist $|a_{ik}| \neq 0$, hat also das zugehörige homogene System keine Lösung, so hat das inhomogene System ein und nur ein Lösungssystem

$$(3) \quad x_k = \frac{1}{|a_{ik}|} (b_1 A_{1k} + b_2 A_{2k} + \dots) = \frac{1}{|a_{ik}|} \sum_i b_i A_{ik}$$

(vgl. S. 10).

$\frac{A_{ik}}{|a_{ik}|}$ sind die Komponenten des *reziproken* Tensors \mathfrak{A}^{-1} (vgl. S. 164)

$\mathfrak{A}\xi = b$; $\xi = \mathfrak{A}^{-1}b$.

Fall b. Ist $|a_{ik}| = 0$, hat also das zugehörige homogene System Lösungssysteme, so ist das inhomogene System im allgemeinen nicht lösbar, sondern nur dann, wenn die $n - l$ Bedingungen

$$(4) \quad \sum_k b_k \xi_k^{(h')} = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, n - l)$$

erfüllt sind. Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems besteht dann aus *einer* Lösung des inhomogenen Systems, vermehrt um die $n - l$ unabhängigen Lösungen des homogenen Systems.

Hat die homogene Gleichung die Lösungen ξ_h bzw. die transponierte die Lösungen ξ_h' , also $\mathfrak{A}'\xi_h' = 0$, so muß sein: $(\xi \mathfrak{A}'\xi_h') = 0 = (\xi_h' \mathfrak{A}\xi) = (\xi_h' b) = 0$. Die ξ_h' sind also Vektoren, die auf der l -dimensionalen Ebene, in der alle $\mathfrak{A}\xi$ liegen, senkrecht stehen.

Ein wichtiger Fall

ist folgender: Gegeben sei ein System inhomogener linearer Gleichungen in der Form:

$$(5) \quad \begin{array}{rcl} (a_{11} - \lambda)x_1 + & a_{12}x_2 + \dots + & a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \dots + & a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}x_1 + & a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n = b_n \end{array}$$

wobei die a_{ik} reell angenommen und $a_{ik} = a_{ki}$ sei. Abgekürzt geschrieben

$$\sum_k a_{ik} x_k - \lambda x_i = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Das zugehörige *homogene* System

$$\sum_k a_{ik} x_k - \lambda x_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

hat nur Lösungen, wenn λ einen der n (reellen) (vgl. S. 9) Werte λ_j ($j = 1, 2, \dots, n$) annimmt, welche sich durch Nullsetzen der Determinante

$$(6) \quad \begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda) & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & (a_{nn} - \lambda) \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{„Säkulargleichung“})$$

als Wurzeln dieser Gleichung n -ten Grades ergeben. Das zu dem „Eigenwert“ λ_j gehörige Lösungssystem der homogenen Gleichungen heiße $\xi_{1j}, \xi_{2j}, \dots, \xi_{nj}$, so daß $\lambda_j \xi_{ij} = \sum_k a_{ik} \xi_{kj}$.

Die „*Eigenlösungen*“ ξ_{kj} sind bis auf einen gemeinsamen Faktor bestimmt, wenn λ_j eine einfache Wurzel ist. Dieser soll festgelegt werden durch die „*Normierungsgleichungen*“

$$(7) \quad \xi_{1j}^2 + \xi_{2j}^2 + \dots + \xi_{nj}^2 = \sum_k \xi_{kj}^2 = 1.$$

Dagegen gilt stets für zwei verschiedene $\lambda_i \neq \lambda_j$

$$(7'') \quad \xi_{1j} \xi_{1j'} + \xi_{2j} \xi_{2j'} + \dots + \xi_{nj} \xi_{nj'} = \sum_k \xi_{kj} \xi_{kj'} = 0.$$

Führt man statt x_n und b_n neue Größen x'_n und b'_n ein durch die (orthogonale) Transformation (Hauptachsentransformation, Entwicklung nach Eigenlösungen)

$$x_i = \sum_k \xi_{ik} x'_k \quad \text{und} \quad b_i = \sum_k \xi_{ik} b'_k,$$

aufgelöst

$$x'_h = \sum_i \xi_{ih} x_i \quad \text{und} \quad b'_h = \sum_i \xi_{ih} b_i,$$

so wird

$$(8) \quad \sum_k x_k^2 = \sum_k x'_k{}^2, \quad \sum_i \sum_k a_{ik} x_i x_k = \sum_j \lambda_j x'_j{}^2.$$

Das obige *inhomogene* System erhält dann die Form:

$$(\lambda_k - \lambda) x_k = b'_k,$$

was durch Einsetzen zur Lösung

$$(9) \quad x_i = \sum_k \frac{\xi_{ik}}{\lambda_k - \lambda} \sum_l \xi_{lk} b_l \quad \text{führt.}$$

In Vektorrechnung bedeutet dies folgendes:

$$\mathfrak{A}x + \lambda x = b; \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{A}'.$$

Wir suchen Lösungen I_j der homogenen Gleichung:

$$\mathfrak{A}I_j - \lambda_j I_j = 0.$$

Die Lösung der inhomogenen Gleichung lautet dann:

$$x = \sum_k \frac{I_k}{\lambda_k - \lambda} (I_k b) \quad (\text{Gl. 9}),$$

wobei die bis auf einen Faktor bestimmten Vektoren I_k als Einheitsvektoren normiert seien (Gl. 7).

Da für zwei *verschiedene* λ_k und $\lambda_{k'}$

$$(I_k \mathfrak{A} I_{k'}) = (I_{k'} \mathfrak{A} I_k) = \lambda_k (I_k I_{k'}) = \lambda_{k'} (I_k I_{k'})$$

ist, muß $(I_k I_{k'}) = 0$ sein (Gl. 7).

Anwendung: Dieser Typus von Gleichungen wird gebraucht u. a. bei der Berechnung der Eigenschwingungen bzw. erzwungenen Schwingungen von Systemen mit n Freiheitsgraden. Die λ_j spielen hier die Rolle von *Eigenfrequenzen*; die x'_i heißen dann *Normalkoordinaten*. Man verwendet diese Gleichungen auch bei der Beurteilung von Stabilitätsfragen (vgl. S. 199).

B. Matrizen und Determinanten.

1. Definitionen.

Ein System von $m \cdot n$ Zahlen a_{ik} („Elemente“), das in einem rechteckigen Schema von m „Zeilen“ und n „Spalten“ *geordnet* ist, heißt eine „*Matrix*“.

$$(1) \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Zeile} = \text{Horizontalreihe} \\ \text{Spalte} = \text{Vertikalreihe.} \end{array}$$

Ist $m = n$, so heißt die Matrix *quadratisch*.

Die Elemente a_{ik} können verschiedene Bedeutung haben. Sie können z. B. die Koeffizienten eines Systems linearer Gleichungen,

einer linearen Transformation, bzw. Komponenten eines Tensors (vgl. S. 172) sein. Ist die Matrix quadratisch, so können sie die Elemente einer Determinante sein.

Vertauscht man in der Matrix alle a_{ik} mit den a_{ki} , also Zeilen und Spalten miteinander, so heißt die neue Matrix die „transponierte“ der ursprünglichen oder zu dieser „konjugiert“.

Aus einer quadratischen Matrix von $n \cdot n$ Elementen a_{ik} bildet man ihre „Determinante“, indem man die sämtlichen Produkte der Form: $a_{i_1 k_1} a_{i_2 k_2} a_{i_3 k_3} \dots$ bildet, so daß alle $i, i' \dots$ und alle $k, k' \dots$ untereinander verschieden sind. Die Indizes $i, i', i'' \dots$ und die $k, k', k'' \dots$ bilden eine Permutation der natürlichen Zahlenfolge 1, 2, 3 ... der i bzw. der k .

Jedes dieser Produkte aus n Elementen heißt ein „Glieder“ der Determinante. Die Zahl der Glieder ist gleich $n!$ Die Determinante ist die Summe dieser Glieder unter Beachtung folgender Vorzeichenregel: Man ordne in jedem Glied die Faktoren so, daß die i in ihrer natürlichen Zahlenfolge stehen und untersuche, wieviel Vertauschungen von je zwei Faktoren nunmehr nötig sind, um die k in ihre natürliche Folge zu bringen. Ist diese Zahl gerade, so ist das Vorzeichen positiv, andernfalls negativ zu setzen. Die Zahl der positiven Glieder ist gleich der der negativen.

Die Determinante schreibt man abgekürzt:

$$(2) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum \pm a_{11} a_{22} \dots a_{nn} = |a_{ik}|.$$

Eine Determinante aus n^2 Größen heißt „ n -ter Ordnung“.

Determinanten, die man erhält, wenn man aus der Matrix einer gegebenen Determinante gewisse Zeilen und Spalten streicht, heißen „Minoren“ der ursprünglichen.

Streicht man die i -te Zeile und die k -te Spalte und multipliziert man den entstehenden Minor mit $(-1)^{i+k}$, so heißt das Produkt die „Unterdeterminante“ von a_{ik} (geschrieben A_{ik}).

Entwicklungssatz: Der Wert einer Determinante ist gleich:

$$(3) \quad |a_{ik}| = \sum_i a_{ik} A_{ik} = \sum_k a_{ik} A_{ik},$$

aber es ist

$$(4) \quad 0 = \sum_k a_{ik} A_{jk} \quad \text{für } i \neq j.$$

Eine Matrix oder eine Determinante heißt „vom Range r “, wenn sie wenigstens eine von Null verschiedene Unterdeterminante r -ter Ordnung besitzt, aber alle in ihr enthaltenen Unterdeterminanten höherer Ordnung verschwinden.

Allgemeine Sätze: Eine Determinante ist $= 0$, wenn

1. alle Elemente einer Reihe (Spalte oder Zeile) $= 0$ sind, oder
2. alle Elemente einer Reihe dieselben Vielfachen der entsprechenden Elemente einer Parallelreihe sind, oder
3. alle Elemente einer Reihe dieselben linearen Kombinationen der entsprechenden Elemente von Parallelreihen sind.

Eine Determinante bleibt ungeändert, wenn

1. man sie transponiert, d. h. alle a_{ik} durch a_{ki} ersetzt,
2. man zu den Elementen einer Reihe die entsprechenden einer Parallelreihe bzw. ein bestimmtes Vielfaches derselben addiert.

Eine Determinante ändert nur ihr Vorzeichen, wenn man zwei Reihen miteinander vertauscht.

Eine Determinante wird mit einem Faktor multipliziert, wenn man alle Elemente einer Reihe mit diesem Faktor multipliziert.

Differentiation.

$$(5) \quad \frac{\partial |a_{ik}|}{\partial a_{ik}} = A_{ik}$$

$$(6) \quad \frac{\partial^2 |a_{ik}|}{\partial a_{ik} \partial a_{im}} = - \frac{\partial^2 |a_{ik}|}{\partial a_{im} \partial a_{ik}},$$

wenn alle a_{ik} voneinander unabhängig sind.

2. Multiplikation von Determinanten.

Das Produkt $|a_{ik}| \cdot |b_{ik}| = |c_{ik}|$ ist eine Determinante, deren Elemente c_{ik} in folgenden vier verschiedenen Weisen gebildet werden können:

$$(7) \quad \begin{aligned} 1. \quad c_{ik} &= a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \dots = \sum_j a_{ij} b_{jk} \quad (j = 1, 2, 3, \dots, n) \\ 2. \quad c_{ik} &= a_{i1} b_{k1} + a_{i2} b_{k2} + \dots = \sum_j a_{ij} b_{kj} \\ 3. \quad c_{ik} &= a_{1i} b_{k1} + a_{2i} b_{k2} + \dots = \sum_j a_{ji} b_{kj} \\ 4. \quad c_{ik} &= a_{1i} b_{1k} + a_{2i} b_{2k} + \dots = \sum_j a_{ji} b_{jk} \end{aligned}$$

Die Matrix der gemäß Vorschrift 1 gebildeten c_{ik} heißt die aus den Matrizes der a_{ik} und b_{ik} „komponierte“ Matrix.

3. „Ränderung“ von Determinanten.

Es gilt:

$$(8) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & u_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & u_n \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n & w \end{vmatrix} = w \cdot |a_{ik}| - \sum_i \sum_k A_{ik} \cdot u_i \cdot v_k.$$

Ist im Speziellen $w = 1$ und sämtliche u_i oder $v_k = 0$, so ist der Wert $= |a_{ik}|$, d. h. gleich dem Wert der ursprünglichen Determinante.

4. Praktische Berechnung von Determinanten.

Man subtrahiere von den Elementen der i -ten Zeile die mit $\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ multiplizierten entsprechenden Elemente der ersten. Hierdurch wird der Wert von $|a_{ik}|$ nicht geändert. Führt man dies an allen Zeilen (außer der ersten) durch, so erhält man eine Determinante der Form

$$(9) \quad |a_{ik}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ 0 & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

In derselben Weise reduziert man die Determinante der b usw. Man erhält schließlich ein einfaches Produkt von n Zahlen als Wert von $|a_{ik}|$. Hierbei ist es meist vorteilhaft, Vertauschungen von Reihen vorzunehmen (unter Beachtung der dabei auftretenden Vorzeichenwechsel) und jeweils möglichst große Faktoren abzusondern.

5. Spezielle Determinanten.

Ist $a_{ik} = a_{ki}$, so heißt die Determinante *symmetrisch*; ist $a_{ik} = -a_{ki}$ und daher $a_{ii} = 0$, so heißt sie *schiefsymmetrisch* (antisymmetrisch).

Sind die a_{ik} konjugiert komplex zu den a_{ki} (d. h. $a_{ik} = u + iv$; $a_{ki} = u - iv$) und die a_{ii} reell, so hat die Determinante einen reellen Wert (*Hermite'sche* Determinante).

Die Gleichung n -ten Grades:

$$(10) \quad \begin{vmatrix} (a_{11} - x) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - x) & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & (a_{nn} - x) \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{matrix} \text{(Säkulargleichung}^1\text{)} \\ \text{für die Unbekannte } x \end{matrix}$$

hat lauter reelle Wurzeln, falls $a_{ik} = a_{ki}$ und alle a_{ii} reell sind; ebenso, falls die Determinante der a_{ik} eine Hermite'sche ist.

Die Gleichung hat (außer $x = 0$, wenn n ungerade) lauter imaginäre Wurzeln, falls die $a_{ik} = -a_{ki}$ und reell und die $a_{ii} = 0$ sind.

¹⁾ Der Name „Säkulargleichung“ ist nur für $a_{ik} = a_{ki}$ gebräuchlich. Sonst heißt die Gleichung „charakteristische Gleichung“.

Eine symmetrische Determinante der Form:

$$(11) \quad Z_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \\ a_3 & a_4 & \dots & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

heißt eine *Zirkulante* oder *zyklische* Determinante. Ihr Wert ist gleich:

$$(12) \quad Z_n = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \prod_{k=0}^{n-1} (a_1 + a_2 \omega^k + a_3 \omega^{2k} + \dots + a_n \omega^{(n-1)k}),$$

wo $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ ist.

6. Determinanten und lineare Gleichungssysteme.

Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem:

$$(13) \quad \sum_k a_{ik} x_k = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

d. h. n lineare Gleichungen für die n Unbekannten x_k mit $|a_{ik}| \neq 0$.
Dann ist

$$(14) \quad x_k = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(k-1)} & b_1 & a_{1(k+1)} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(k-1)} & b_2 & a_{2(k+1)} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(k-1)} & b_n & a_{n(k+1)} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|a_{ik}|},$$

d. h. gleich der Determinante, die man aus $|a_{ik}|$ erhält, wenn man die Elemente der k -ten Spalte durch die entsprechenden b_i ersetzt, dividiert durch $|a_{ik}|$.

(Diese formale Lösung ist zur praktischen Rechnung oft wenig geeignet, weil die Umrechnung der Determinanten mehr Arbeit erfordert als die Berechnung von x_k durch schrittweise Elimination.)

Umgekehrt kann der Wert von $|a_{ik}|$ auch aus den Lösungen von linearen Gleichungssystemen gefunden werden, wie folgt:

Man löse nacheinander folgende Systeme

$$\begin{aligned} 1. & \quad a_{11} x_1 = 1. \\ 2. & \quad \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} y_2 = 0 \\ a_{21} x_1 + a_{22} y_2 = 1. \end{cases} \\ 3. & \quad \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} y_2 + a_{13} z_3 = 0 \\ a_{21} x_1 + a_{22} y_2 + a_{23} z_3 = 0 \\ a_{31} x_1 + a_{32} y_2 + a_{33} z_3 = 1 \end{cases} \\ & \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

Dann ist

$$(15) \quad |a_{ik}| = \frac{1}{x_1 x_2 x_3 \dots x_n}.$$

Die Berechnung von Determinanten und die Lösung von linearen Gleichungssystemen sind daher praktisch gleiche Probleme.

C. Kombinatorik.

I. Permutationen:

1. Die Anzahl der Permutationen aus n verschiedenen Elementen ist $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$ (n Fakultät).

2. Sind unter den n Elementen α, β, γ usw. unter sich gleiche Elemente, so wird die Anzahl der Permutationen $= \frac{n!}{\alpha! \beta! \gamma! \dots}$.

II. Variationen (Kombinationen mit Berücksichtigung der Anordnung):

Die Anzahl der Variationen aus n Elementen zur r -ten Klasse ist ohne Wiederholung $n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1) = \binom{n}{r} \cdot r!$ mit Wiederholung n^r .

III. Kombinationen (Kombinationen ohne Berücksichtigung der Anordnung):

Die Anzahl der Kombinationen aus n Elementen zur r -ten Klasse ist

$$\text{ohne Wiederholung: } \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

$$\text{mit Wiederholung: } \binom{n+r-1}{r}.$$

Die hier und bei anderer Gelegenheit auftretenden

Binomialkoeffizienten

haben folgende Bedeutung:

$$(1) \quad \binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1)}{r!} = \binom{n}{n-r} = \frac{n!}{(n-r)! r!}, \quad \binom{n}{0} = 1$$

und befolgen folgende Regeln:

$$(2) \quad \binom{n}{1} = n \quad \binom{n}{n} = 1$$

$$(3) \quad \binom{n+1}{r} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1}$$

$$(4) \quad \binom{n+1}{r+1} = \binom{n}{r} + \binom{n-1}{r} + \binom{n-2}{r} + \dots + \binom{r}{r}$$

$$(5) \quad \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Für große Zahlen n und m wird:

Stirlingsche Formel:

$$(6) \quad n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \cdot \left(1 + \frac{1}{12n} + \dots\right)$$

$$(7) \quad \binom{n}{m} = \frac{e^{-x^2} \cdot 2^n}{\sqrt{\pi n}}, \quad \text{wo } x = \frac{m - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{2}}}$$

$$(8) \quad \binom{n}{m} p^m \cdot q^{n-m} = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{2\pi n p q}},$$

wobei $q = 1 - p$ und $x = \frac{m - np}{\sqrt{2npq}}$.

Ist n auch sehr groß gegen m , so wird:

$$(9) \quad \binom{n}{m} = \frac{n^m}{m!}.$$

Verwendung: Das Hauptverwendungsgebiet der Kombinatorik ist die Wahrscheinlichkeitsrechnung, bzw. die statistische Mechanik (s. S. 147 u. 197).

Literatur:

Böcher: Einführung in die höhere Algebra (Leipzig: B. G. Teubner). — *Courant-Hilbert:* Methoden d. math. Physik I, Kap. I (Berlin: Julius Springer). — *Netto:* Determinanten (Leipzig: B. G. Teubner). — *Pascal:* Determinanten (Leipzig: B. G. Teubner). — *Kowalewski:* Einführung in die Determinantentheorie (Leipzig: VVV) u. a.

Zweiter Abschnitt.

Differential- und Integralrechnung.

1. Differentiationstabelle.

Funktion $y = f(x)$	Ableitung $\frac{dy}{dx}$
x^m	$m x^{m-1}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
a^x	$a^x \ln a$
e^{ax}	$a e^{ax}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{ctg}^2 x)$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arcsec} x$	$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \quad 1)$
$\operatorname{arccosec} x$	$-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$\sqrt{a^2 \pm x^2}$	$\pm \frac{x}{\sqrt{a^2 \pm x^2}}$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$\frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$

1) $\sec x = \frac{1}{\cos x}$; $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$.

2. Differentiations-Regeln.

Es seien u und v Funktionen von x ; dann gilt:

$$\frac{d(u \pm v)}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx},$$

$$\frac{d(uv)}{dx} = v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx},$$

$$\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2},$$

$$\frac{d}{dx} [\ln(uv)] = \frac{1}{u} \frac{du}{dx} + \frac{1}{v} \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \left[\ln\left(\frac{u}{v}\right) \right] = \frac{1}{u} \frac{du}{dx} - \frac{1}{v} \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} u^v = v u^{v-1} \frac{du}{dx} + u^v \ln u \frac{dv}{dx}$$

3. Umformung von Differentialausdrücken.

Erster Differentialquotient.

$$1. \quad \frac{dy}{dx} = 1 : \frac{dx}{dy}.$$

$$2. \quad y = F(u) \quad \text{und} \quad u = f(x), \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}.$$

3. u, v, w, \dots seien Funktionen von x und

$$y = f(u, v, w, \dots), \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{dv}{dx} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{dw}{dx} + \dots$$

Logarithmische Differentiation:

$$\frac{u'}{u} = \text{logarithmische Ableitung von } u. \quad \text{Z. B.}$$

$$\begin{array}{l|l} y = u \cdot v \cdot w \dots, & y = \frac{u}{v}, \\ \frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} + \frac{w'}{w} + \dots, & \frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}. \end{array}$$

4. Differentiation implizit gegebener Funktionen:

$$f(x, y) = 0, \quad \frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}}{\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}}$$

$$5. \quad x = \varphi(t), \quad y = \psi(t); \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d\psi}{dt}}{\frac{d\varphi}{dt}}; \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\varphi' \psi'' - \psi' \varphi''}{\varphi'^3}.$$

6. $z = z(x, y)$, d. h. z sei Funktion von x und y .

$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_y dx + \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_x dy$ heißt das totale Differential von z .

Das Zeichen $\Big|_y$ bzw. $\Big|_x$ bedeutet, daß bei der Differentiation y bzw. x konstant gehalten werden soll.

Ein Ausdruck $dz = f_1(x, y) dx + f_2(x, y) dy$ heißt ein totales Differential, wenn $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$. Dann und nur dann kann dz als Differential einer Funktion $z = f(x, y)$ betrachtet werden.

7. Sei $\varphi = \varphi(x, y)$. Führt man statt y als neue Variable $z = z(x, y)$ ein, so gilt:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_y = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_z + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_y$$

und

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_x = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_x \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_x$$

Führt man $z(x, y)$ und $w(x, y)$ statt x und y als Variable ein, so gilt:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_y = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_w \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_y + \frac{\partial \varphi}{\partial w} \Big|_z \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_y$$

und

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_x = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_w \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_x + \frac{\partial \varphi}{\partial w} \Big|_z \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_x$$

Allgemein sei $\varphi = \varphi(x_1, x_2, x_3, \dots)$, und der Zusammenhang der neuen Variablen y_1, y_2, y_3, \dots mit den alten gegeben durch $x_i = x_i(y_1, y_2, y_3, \dots)$.

Dann ist

$$d\varphi = \sum_i \frac{\partial \varphi}{\partial y_k} \Big|_{x_i} dx_i; \quad dx_i = \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial y_k} \Big|_{y_r} dy_k,$$

also

$$d\varphi = \sum_i \sum_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \Big|_{x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial y_k} \Big|_{y_r} dy_k = \sum_k \frac{\partial \varphi}{\partial y_k} \Big|_{y_r} dy_k,$$

mithin

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_k} \Big|_{y_r} = \sum_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \Big|_{x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial y_k} \Big|_{y_r}$$

bzw.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \Big|_{x_i} = \sum_k \frac{\partial \varphi}{\partial y_k} \Big|_{y_r} \cdot \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \Big|_{x_i}$$

Höhere Differentialquotienten.

$$1. \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{-\frac{d^2 x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}; \quad \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{3 \left(\frac{d^2 x}{dy^2}\right)^2 - \frac{dx}{dy} \cdot \frac{d^3 x}{dy^3}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^5}.$$

$$2. \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 y}{du^2} \cdot \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{du} \cdot \frac{d^2 u}{dx^2}$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d^3 y}{du^3} \cdot \left(\frac{du}{dx}\right)^3 + \frac{d^2 y}{du^2} \cdot 3 \frac{du}{dx} \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{dy}{du} \cdot \frac{d^3 u}{dx^3}.$$

3. Übergang zu neuen Variablen

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} = \sum_l \sum_r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_l \partial y_r} \cdot \frac{\partial y_l}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial y_r}{\partial x_k} + \sum_l \frac{\partial \varphi}{\partial y_l} \cdot \frac{\partial^2 y_l}{\partial x_i \partial x_k}.$$

4. Integrationsmethoden.

1. Durch partielle Integration:

$$\int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx = u(x) \cdot v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx.$$

2. Durch Zerlegung in Partialbrüche: $\int \frac{\varphi(x)}{f(x)} dx$. Sind $\varphi(x)$ und $f(x)$ ganze rationale Funktionen, $f(x)$ von höherem Grad als $\varphi(x)$, so läßt sich $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ immer in eine Summe von Partialbrüchen zerlegen, die sich ohne Schwierigkeit integrieren lassen.

a) Hat $f(x) = 0$ lauter verschiedene Wurzeln, ist also

$$f(x) \equiv (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n),$$

so wird

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} \equiv \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \dots + \frac{A_n}{x - x_n},$$

worin $A_1 \equiv \frac{\varphi(x_1)}{f'(x_1)}$ ist.

b) Hat $f(x) = 0$ mehrfache Wurzeln, und zwar α Wurzeln x_1 , β Wurzeln x_2 usw., so hat die Partialbruchzerlegung die Form:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(x)}{f(x)} &\equiv \frac{A_1}{(x - x_1)^\alpha} + \frac{A_2}{(x - x_2)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_\alpha}{(x - x_1)} \\ &+ \frac{B_1}{(x - x_2)^\beta} + \frac{B_2}{(x - x_2)^{\beta-1}} + \dots \end{aligned}$$

$A_i, B_i, C_i \dots$ findet man durch Koeffizientenvergleichung.

Ist z. B. $f(x) \equiv (x - x_1)^\alpha \cdot f_1(x)$, so hat man zur Bestimmung der A_i die α Gleichungen:

$$\varphi(x_1) = A_1 f_1(x_1)$$

$$\varphi'(x_1) = A_1 f_1'(x_1) + A_2$$

$$\varphi''(x_1) = A_1 f_1''(x_1) + 2 A_2 f_1'(x_1) + 2 A_3 f_1(x_1)$$

Sind die Wurzeln von $f(x) = 0$ zum Teil imaginär und sind $f(x)$ und $\varphi(x)$ reell, so kann man immer je zwei komplexe Summanden zu einem reellen Gliede zusammenziehen. Ist z. B. $x_1 = u_1 + i v_1$; $x_2 = u_1 - i v_1$, so ist

$$\frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} = \frac{Px + Q}{(x - u_1)^2 + v_1^2}.$$

3. Durch Einführung neuer Veränderlicher. Substitutionen, die häufig die Integration ermöglichen:

$$a) \xi = a + bx; \quad x = \frac{1}{b}(\xi - a); \quad dx = \frac{1}{b} d\xi;$$

$$b) \xi = a + bx^2; \quad x^2 = \frac{1}{b}(\xi - a); \quad dx = \frac{d\xi}{2\sqrt{b(\xi - a)}};$$

$$c) \xi = \frac{a}{x} + b; \quad x = \frac{a}{\xi - b}; \quad dx = -\frac{a d\xi}{(\xi - b)^2};$$

$$d) \xi = \frac{a + bx}{a - bx}; \quad x = \frac{a(\xi - 1)}{b(\xi + 1)}; \quad dx = \frac{2a}{b(\xi + 1)^2};$$

$$e) \xi = \sqrt[n]{a + bx}; \quad x = \frac{\xi^n - a}{b}; \quad dx = \frac{n}{b} \xi^{n-1} d\xi;$$

$$f) \xi = \sin x; \quad x = \arcsin \xi; \quad dx = \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}};$$

$$g) \xi = \operatorname{tg} \frac{x}{2}; \quad x = \arcsin \operatorname{tg} 2\xi; \quad dx = \frac{2 d\xi}{1 + \xi^2};$$

$$\sin x = \frac{2\xi}{1 + \xi^2}; \quad \cos x = \frac{1 - \xi^2}{1 + \xi^2}.$$

Zu 1 und 2: Durch Einführung neuer Veränderlicher und Partialbruchzerlegung sind Ausdrücke von der Form:

$$R(x), \quad R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right), \quad R(x, \sqrt{a+2bx \pm cx^2}),$$

worin $R(x)$ eine rationale Funktion von x und des Wurzelausdrucks bedeutet, stets allgemein zu integrieren.

4. Durch Entwicklung des Integranden in eine Potenzreihe. Eine Potenzreihe darf gliedweise integriert werden, wenn beide Integrationsgrenzen im Innern des Konvergenzgebietes liegen.

5. Integrationsstabelle.

$f(x) = \frac{dy}{dx}$	$y = \int f(x) dx$
$(x+a)^m$	$\frac{1}{m+1} (x+a)^{m+1}$
$\frac{1}{a+x}$	$\ln(a+x)$
$\frac{1}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a}$
$\frac{1}{a^2-x^2}$	$\frac{1}{a} \operatorname{Ar} \operatorname{Tg} \left(\frac{x}{a} \right) = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x}$ für $ x < a$
	$\frac{1}{a} \operatorname{Ar} \operatorname{Ctg} \left(\frac{x}{a} \right) = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{x-a}$ für $ x > a$
$\sqrt{x^2 \pm a^2}$	$\frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})$
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$\frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \left(\frac{x}{a} \right)$
$\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\arcsin \left(\frac{x}{a} \right)$
$\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$	$\operatorname{Ar} \operatorname{Sin} \left(\frac{x}{a} \right) = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$
$\frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}$	$\operatorname{Ar} \operatorname{Cos} \left(\frac{x}{a} \right) = \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2})$
$\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)}$	$\frac{1}{x_1-x_2} \ln \frac{x-x_1}{x-x_2}$
$\frac{1}{x^2+2bx+c}$	$\frac{1}{2\sqrt{b^2-c}} \ln \frac{x+b-\sqrt{b^2-c}}{x+b+\sqrt{b^2-c}}$ für $c < b^2$
	$\frac{1}{\sqrt{c-b^2}} \arctg \left(\frac{x+b}{\sqrt{c-b^2}} \right)$ für $c > b^2$
$\frac{Ax+B}{(x-x_1)(x-x_2)}$	$\frac{1}{x_1-x_2} \{ (Ax_1+B) \ln(x-x_1) - (Ax_2+B) \ln(x-x_2) \}$
$\frac{1}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}$	$\frac{1}{\sqrt{a}} \ln(b_1 + ax + \sqrt{a} \sqrt{ax^2+2bx+c})$
$\frac{1}{\sqrt{-ax^2+2bx+c}}$	$\frac{1}{\sqrt{a}} \arcsin \frac{ax-b}{\sqrt{b^2+ac}}$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$-\ln(\cos x)$

$$\int f(x) dx$$

$$\ln(\sin x)$$

$$\cos x$$

$$\sin x$$

$$\ln(\cos x)$$

$$\ln(\sin x)$$

$$\ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{4} + \frac{x}{2}\right)$$

$$\ln \operatorname{tg} x$$

$$- \operatorname{ctg} x$$

$$\operatorname{tg} x$$

$$- \frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{x}{2}$$

$$\frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{x}{2}$$

$$- \frac{1}{m} \sin^{m-1} x \cdot \cos x + \frac{m-1}{m} \int \sin^{m-2} x dx$$

$$\frac{1}{m} \cos^{m-1} x \cdot \sin x + \frac{m-1}{m} \int \cos^{m-2} x dx$$

$$\frac{1}{m-1} \operatorname{tg}^{m-1} x - \int \operatorname{tg}^{m-2} x dx$$

$$- \frac{1}{m-1} \operatorname{ctg}^{m-1} x - \int \operatorname{ctg}^{m-2} x dx$$

$$- \frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int \sin^{m-2} x \cos^n x dx$$

$$= \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^m x \cos^{n-2} x dx$$

$$- \frac{\cos x}{(n-1) \sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}$$

$$\frac{\sin x}{(n-1) \cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}$$

$$\frac{\sin^{m+1} x}{(n-1) \cos^{n-1} x} - \frac{m-n+2}{n-1} \int \frac{\sin^m x dx}{\cos^{n-2} x}$$

$f(x)$	$\int f(x) dx$
$\frac{\cos^m x}{\sin^n x}$	$\frac{\cos^{m+1} x}{(n-1) \sin^{n-1} x} - \frac{m-n+2}{n-1} \int \frac{\cos^m x dx}{\sin^{n-2} x}$
$\arcsin x$	$x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$
$\arccos x$	$x \arccos x - \sqrt{1-x^2}$
$\operatorname{arctg} x$	$x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$
e^x	e^x
$a^x \equiv e^{x \ln a}$	$\frac{1}{\ln a} a^x$

6. Bestimmte Integrale¹⁾.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{für } a > 0$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{x} dx = \infty$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\sin ax \cos bx}{x} dx &= \frac{\pi}{2} && \text{für } a > b \quad (\text{Dirichlets diskontinuierlicher Faktor}) \\ &= 0 && \text{für } a < b \\ &= \frac{\pi}{4} && \text{für } a = b \end{aligned}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-a}$$

$$\int_0^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \int_0^{\pi} \sin mx \sin nx dx = 0$$

für ganzzahliges m und n , außer $= \frac{\pi}{2}$ für $m = n$

¹⁾ Eine große Sammlung bestimmter Integrale findet man in dem Buch:
D. Bierens de Haan, *Nouvelles tables d'intégrales définies*, Leiden 1867.

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha} dx = \Gamma(\alpha + 1) = \Pi(\alpha) \quad \text{vgl. S. 70.}$$

$$\int_0^1 x^{\alpha} (1-x)^{\beta} dx = 2 \int_0^1 x^{2\alpha+1} (1-x^2)^{\beta} dx$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\alpha+1} \varphi \cos^{2\beta+1} \varphi d\varphi$$

$$= \frac{\Pi(\alpha) \Pi(\beta)}{\Pi(\alpha + \beta + 1)} = \frac{\Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 2)}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sqrt{\sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{\cos x} dx = \frac{1}{6\sqrt{2}\pi} \Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}} = \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt[3]{\sin \varphi}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{3}\sqrt[3]{2}} \Gamma^3\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^3}} = \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{\sin \varphi} d\varphi = \frac{\sqrt{3}}{\pi\sqrt[3]{4}} \Gamma^3\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi}} = \frac{1}{4\sqrt{2}\pi} \Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin(p\pi)}; \quad 0 < p < 1$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} dx = \frac{1}{a}$$

$$\int_0^{\infty} x^a e^{-ax} dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a^{\frac{a+1}{2}}} \Pi\left(\frac{a+1}{2}\right)$$

$$\int_0^{\infty} x^{2n+1} e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1) \sqrt{\pi}}{2^{n+1} a^{n+\frac{1}{2}}}$$

$a > 0$, n ganze Zahl.

Ein wichtiges Hilfsmittel zur Auswertung bestimmter Integrale ist der Cauchysche Integralsatz der Funktionentheorie, vgl. S. 35.

7. Differenzenrechnung.

Von einer Funktion $f(x)$ bilde man für einen gegebenen Wert von x folgende Ausdrücke:

$$1. \quad \frac{1}{h} \bar{\Delta} f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$2. \quad \frac{1}{h} \underline{\Delta} f(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

$$3. \quad \frac{1}{h} \Delta f(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}, \quad (\Delta = \frac{1}{2}(\bar{\Delta} + \underline{\Delta})).$$

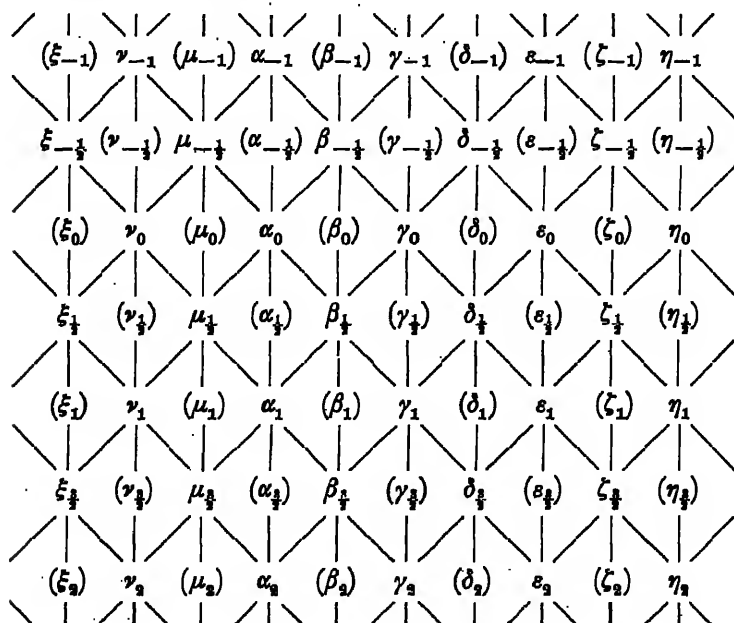
Man bezeichnet diese Größen als *vordere*, *hintere* und *mittlere Differenzenquotienten*, gebildet mit der Differenz h der Variablen. Beim Grenzübergang $h \rightarrow 0$ gehen diese Ausdrücke für differenzierbare Funktionen in den Differentialquotienten $\frac{df(x)}{dx}$ über.

Analog definieren wir einen 2. Differenzenquotienten durch:

$$\frac{1}{h^2} \Delta^2 f(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}, \quad (\Delta^2 = \bar{\Delta} - \underline{\Delta}).$$

Die Bildung höherer Differenzenquotienten erfolgt ganz analog.

Liegt eine Funktion $f(x)$ in konstanten Intervallen h tabuliert vor, so berechnet man die mit den entsprechenden Potenzen von h multiplizierten Differenzenquotienten (also die Δ^n) durch Subtraktionen nach folgendem Schema:



In dieses Schema tragen wir an die Stellen α_n (n ganzzahlig) die Funktionswerte von $f(x + n h)$ ein. Sodann schreibt man an die Stellen $\beta_{n+\frac{1}{2}}$ die Differenz der links oberhalb und links unterhalb stehenden α_{n+1} und α_n , ($\beta_{n+\frac{1}{2}} = \alpha_{n+1} - \alpha_n$). Analog berechnet man die γ_n aus: $\gamma_n = \beta_{n+\frac{1}{2}} - \beta_{n-\frac{1}{2}}$ und verfährt entsprechend für die δ , ε usw. Schließlich findet man die noch ausstehenden, durch Einklammerung bezeichneten $\alpha_{n+\frac{1}{2}}$, β_n , $\gamma_{n+\frac{1}{2}}$... durch Mittelwertbildung aus den beiden jeweils oberhalb und unterhalb stehenden Zahlen, z. B.: $\beta_n = \frac{1}{2}(\beta_{n+\frac{1}{2}} + \beta_{n-\frac{1}{2}})$. Die (mittleren) Differenzenquotienten an der Stelle $x + n h$ sind dann bis auf die entsprechende Potenz von h die rechts neben α_n stehenden β_n , γ_n usw.

Wir können das Schema auch nach links weiter ausfüllen, indem wir zunächst an einer Stelle $\mu_{n+\frac{1}{2}}$ eine beliebige Zahl, z. B. 0, eintragen und nunmehr die weiteren $\mu_{n+\frac{1}{2}}$ so berechnen, daß $\mu_{n+\frac{1}{2}} - \mu_{n-\frac{1}{2}} = \alpha_n$ wird, also durch Addition der jeweils rechts unterhalb stehenden Zahl das folgende μ finden. Ebenso verfahren wir mit der Reihe für ν , ξ usw. Die eingeklammerten Werte findet man wieder wie oben durch Mittelwertbildung. Die links stehenden Zahlen μ , ν , ξ ... bezeichnet man als erste, zweite... *Summenwerte*.

Zusammenhang zwischen Differenzenquotienten und Differentialquotienten.

Die Taylorsche Reihenformel (s. S. 29) liefert unmittelbar die Möglichkeit, die Differenzenquotienten als lineare Funktionen der Differentialquotienten auszurechnen. Diese Berechnung hat aber nur untergeordnete Bedeutung gegenüber dem umgekehrten Problem, aus den gegebenen Differenzenquotienten die Differentialquotienten zu berechnen. Die Auflösung des linearen Gleichungssystems liefert:

$$h \frac{d}{dx} f(x + n h) = \beta_n - \frac{1}{6} \delta_n + \frac{1}{30} \zeta_n - \dots$$

$$h^2 \frac{d^2}{dx^2} f(x + n h) = \gamma_n - \frac{1}{12} \varepsilon_n + \frac{1}{90} \eta_n - \dots$$

bzw.

$$h \frac{d}{dx} f(x + (n + \frac{1}{2}) h) = \beta_{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{24} \delta_{n+\frac{1}{2}} + \frac{3}{640} \zeta_{n+\frac{1}{2}} - \dots$$

$$h^2 \frac{d^2}{dx^2} f(x + (n + \frac{1}{2}) h) = \gamma_{n+\frac{1}{2}} - \frac{5}{24} \varepsilon_{n+\frac{1}{2}} + \frac{259}{5760} \eta_{n+\frac{1}{2}} - \dots$$

Diese Formeln gestatten also die „numerische Differentiation“ einer tabuliert vorliegenden Funktion. In entsprechender Weise kann man einen linearen

Zusammenhang zwischen Summenwerten und Integralen
durch folgende Formeln geben:

$$\frac{1}{h} \int_{x+n_1 h}^{x+n_2 h} f(x) dx = \left[\mu_n - \frac{1}{12} \beta_n + \frac{11}{720} \delta_n - \frac{191}{60480} \epsilon_n + \dots \right]_{n_1}^{n_2}$$

$$\frac{1}{h^2} \int_{x+n_1 h}^{x+n_2 h} \int_{x+n_1 h}^{x+n_2 h} f(x) dx = \left[\nu_n + \frac{1}{12} \alpha_n - \frac{1}{240} \gamma_n + \frac{31}{60480} \varepsilon_n - \dots \right]_{n_1}^{n_2}$$

$$\frac{1}{h^3} \int_{x+n_1 h}^{x+n_2 h} \int_{x+n_1 h}^{x+n_2 h} \int_{x+n_1 h}^{x+n_2 h} f(x) dx = \left[\xi_n + \frac{1}{240} \beta_n - \frac{31}{30240} \delta_n + \dots \right]_{n_1}^{n_2}$$

Diese Formeln sind nützlich für das praktisch häufig vorkommende Problem der „numerischen Integration“.

Auch zur

Interpolation

ist das Differenzenschema mit Vorteil zu benutzen. Gesucht sei der Wert von $f(x + (n + t)h)$, ($0 < t < 1$).

Man berechne zunächst die Größen:

$A = t$, $B = \frac{1}{2}(t - 1)$, $C = \frac{1}{3}(t + 1)$, $D = \frac{1}{4}(t - 2)$, $E = \frac{1}{5}(t + 2) \dots$,
dann ist:

$$\begin{aligned} f(x + (n + t)h) &= \alpha_n + A I, & I &= \beta_{n+\frac{1}{2}} + B II \\ & & II &= \gamma_n + C III \\ & & III &= \delta_{n+\frac{1}{2}} + D IV \\ & & IV &= \varepsilon_n + E V \\ & & & \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x + (n - t)h) &= \alpha_n - A I, & I &= \beta_{n-\frac{1}{2}} - B II \\ & & II &= \gamma_n - C III \\ & & III &= \delta_{n-\frac{1}{2}} - D IV \\ & & IV &= \varepsilon_n - E V \\ & & & \dots \end{aligned}$$

Wieviel man von diesen Gliedern zu berücksichtigen hat, richtet sich nach der gewünschten Genauigkeit. Wegen weiterer Einzelheiten vgl. die einschlägigen Lehrbücher der praktischen Analysis, vgl. S. 2.

Literatur.

v. Mangoldt: Einführung in die höhere Mathematik. Leipzig: Hirzel. —
Serrat-Scheffers: Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Leipzig:
Teubner. — *de la Vallée-Poussin*: Cours d'analyse. Paris: Gauthiers-Villars. —
Bieberbach: Leitfaden der Differential- und Integralrechnung. Leipzig: Teubner.

Dritter Abschnitt.

Reihen.

1. Grundbegriffe.

Gegeben sei eine unendliche Anzahl reeller oder komplexer Zahlen $u_0, u_1, u_2 \dots$. Man bezeichnet dann ihre formal gebildete Summe als eine *konvergente* Reihe, wenn die Summe der n ersten Glieder $S_n = u_0 + \dots + u_{n-1}$ für $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$ einer bestimmten endlichen Grenze zustrebt. $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ heißt der Summenwert der Reihe. Ist die Reihe nicht konvergent, so heißt sie *divergent*. Die Größe $S - S_n = R_n$ heißt der Reihenrest.

Man spricht von *unbedingter* Konvergenz, im Gegensatz zu *bedingter* Konvergenz, wenn der Summenwert nicht von der Anordnung der Glieder abhängt. Das ist stets und nur der Fall, wenn die Reihe der absoluten Beträge konvergiert, die Reihe also *absolut* konvergiert.

Sind die u_n Funktionen einer Variablen z , so spricht man von *gleichmäßiger* Konvergenz, wenn für genügend großes n der Rest $|R_n(z)| < \delta$ wird, wo δ eine für alle z des in Frage kommenden z -Bereiches gleiche und beliebig klein wählbare Zahl ist. Dann ist in diesem Bereich der Summenwert $S(z)$ eine stetige Funktion von z .

Bei gleichmäßiger Konvergenz darf gliedweise integriert werden:

$$\int S(z) dz = \sum_0^\infty \int u_n dz.$$

Ist die Reihe $\sum_0^\infty \frac{du_n}{dz}$ gleichmäßig konvergent, so ist ihr Summenwert $= \frac{dS(z)}{dz}$.

Eine gleichmäßig konvergente Reihe analytischer Funktionen ist eine stetige analytische Funktion.

2. Konvergenzkriterien.

Eine Reihe konvergiert, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1$ (nicht etwa gleich 1) ist,

ebenso wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} < 1$.

Eine Reihe aus *abwechselnd positiven und negativen* Gliedern konvergiert, wenn die Beträge ihrer Glieder mit wachsendem n gegen 0 konvergieren.

Eine Reihe konvergiert absolut, wenn jedes Glied in ihr dem Betrage nach kleiner ist als das gleichvielte einer konvergenten Reihe aus positiven Gliedern.

Für die Konvergenz einer unendlichen Reihe ist es belanglos, ob eine endliche Zahl von Gliedern hinzugefügt oder fortgelassen wird.

3. Wichtige Reihen.

Die für praktische Anwendungen wichtigsten Reihen sind:

1. *Potenzreihen* a) nach steigenden Potenzen

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots,$$

b) nach fallenden Potenzen

$$a_0 + \frac{a_{-1}}{x} + \frac{a_{-2}}{x^2} + \dots; \quad (\text{vgl. S. 36 ff.})$$

2. *Fouriersche Reihen*

$$a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \dots \\ + \frac{b_0}{2} + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \dots; \quad (\text{vgl. S. 29})$$

3. *Kugelfunktionsreihen*

$$a_0 + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x) + \dots \quad (\text{vgl. S. 62})$$

4. *Zylinderfunktionsreihen*

$$a_0 + a_1 J_0(\alpha_1 x) + a_2 J_0(\alpha_2 x) + \dots \quad (\text{vgl. S. 69})$$

4. Summation von Reihen.

Es ist praktisch von großer Bedeutung, den Summenwert einer Reihe entweder durch leicht berechenbare oder durch tabulierte Funktionen darzustellen.

Hierzu dient zunächst folgende Übersicht:

Endliche Reihen.

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1},$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1),$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4} n^2(n+1)^2.$$

Unendliche Reihen.

$$1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots = (1+x)^n, \quad 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x},$$

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = e^x,$$

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,718\,281\,828\dots,$$

$$1 + \frac{x \ln a}{1!} + \frac{(x \ln a)^2}{2!} + \dots = e^{x \ln a} = a^x,$$

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots = \sin x, \quad x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = \sin x,$$

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \dots = \cos x, \quad 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \cos x,$$

$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots = \operatorname{tg} x,$$

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \dots = \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x,$$

$$x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots = \arcsin x,$$

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - + \dots = \operatorname{arctg} x,$$

$$\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \ln(1+x),$$

$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right),$$

$$x - \frac{1}{3} \frac{x^3}{3!} + \frac{1}{5} \frac{x^5}{5!} - + \dots = \int_0^x \frac{\sin x}{x} dx = \operatorname{Si} x \quad (\text{„Integralsinus“}),$$

$$C + \ln x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2!} + \frac{1}{4} \frac{x^4}{4!} - + \dots = - \int_x^\infty \frac{\cos x}{x} dx = \operatorname{Ci} x \quad (\text{„Integralcosinus“}),$$

$$C + \ln x + x + \frac{1}{2} \frac{x^2}{2!} + \frac{1}{3} \frac{x^3}{3!} + \dots = \int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx = \operatorname{li}(e^x) \quad (\text{„Integrallogarithmus“}),$$

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right) = 0,577\,215\,66\dots$$

(Eulersche Konstante),

$$1 - \frac{x^2}{5 \cdot 2!} + \frac{x^4}{9 \cdot 4!} - \frac{x^6}{13 \cdot 6!} + \dots = \frac{1}{2\sqrt{x}} \int_0^x \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$$

(Fresnelsche
Integrale),

$$\frac{x}{3} - \frac{x^3}{7 \cdot 3!} + \frac{x^5}{11 \cdot 5!} - + \dots = \frac{1}{2\sqrt{x}} \int_0^x \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$$

$$\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots = \int_0^x e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Phi(x)$$

(Gaußsches Fehlerintegral),

$$1 - \frac{1}{x} + \frac{1 \cdot 3}{x^3} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{x^5} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{\frac{\pi x}{2}}}} \Phi\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right).$$

ϑ -Funktionen (s. S. 75).

$$\frac{1}{2} - q \cos 2\pi x + q^4 \cos 4\pi x - q^9 \cos 6\pi x + \dots = \frac{1}{2} \vartheta(x),$$

$$\frac{1}{4} \sin \pi x - q^{\frac{9}{4}} \sin 3\pi x + q^{\frac{25}{4}} \sin 5\pi x - \dots = \frac{1}{2} \vartheta_1(x),$$

$$\frac{1}{4} \cos \pi x + q^{\frac{9}{4}} \sin 3\pi x + q^{\frac{25}{4}} \sin 5\pi x + \dots = \frac{1}{2} \vartheta_2(x),$$

$$\frac{1}{2} + q \cos 2\pi x + q^4 \cos 4\pi x + q^9 \cos 6\pi x + \dots = \frac{1}{2} \vartheta_3(x).$$

Elliptische Funktionen (s. S. 75).

$$x - (1 + k^2) \frac{x^3}{3!} + (1 + 14k^2 + k^4) \frac{x^5}{5!} - \dots = sn x.$$

$$1 - \frac{x^2}{2!} + (1 + 4k^2) \frac{x^4}{4!} - (1 + 44k^2 + 16k^4) \frac{x^6}{6!} + \dots = cn x,$$

$$1 - k^2 \frac{x^2}{2} + k^2 (4 + k^2) \frac{x^4}{4!} - k^2 (16 + 44k^2 + k^4) \frac{x^6}{6!} + \dots = dn x.$$

Kugelfunktionen (s. S. 54).

$$\begin{aligned} \cos nx + \frac{1}{1} \frac{n}{2n-1} \cos(n-2)x + \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2} \frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n-3)} \cos(n-4)x \\ + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{n(n-1)(n-2)}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)} \cos(n-6)x + \dots \\ = \frac{2^n n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)} \frac{P_n(\arccos x)}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} x^{n-4} - \dots \\ = \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)} P_n(x). \end{aligned}$$

Zylinderfunktionen (s. S. 63).

$$1 - \frac{x}{1 \cdot (p+1)} + \frac{x^2}{1 \cdot 2 \cdot (p+1)(p+2)} - \dots = \frac{\Pi(p)}{x^{\frac{p}{2}}} J_p(x),$$

$$1 - \frac{x^2}{1!^2} + \frac{x^4}{2!^2} - \frac{x^6}{3!^2} + \dots = J_0(2x),$$

$$1 - \frac{x}{1!^2} + \frac{x^2}{2!^2} - \frac{x^3}{3!^2} + \dots = J_0(2\sqrt{x}),$$

$$1 - \frac{x}{1!2!} + \frac{x^2}{2!3!} - \frac{x^3}{3!4!} + \dots = \frac{1}{\sqrt{x}} J_1(2\sqrt{x}) = -\frac{1}{\sqrt{x}} J_0'(2\sqrt{x}),$$

$$1 - \frac{3x^2}{2 \cdot 4} + \frac{3^2 x^4}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 10} - \frac{3^3 x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 10 \cdot 16} + \dots = \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{8}}} J_{-\frac{1}{8}}(x),$$

$$1 - \frac{x^2}{1 \cdot 5} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 9} - \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 13} + \dots = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{\frac{x}{2}}} J_{\frac{1}{4}}(x).$$

Ist die vorliegende Reihe nicht mit einer der hier gegebenen Reihen identisch, so gelingt es oft durch Multiplikation, Division, Differentiation, Integration usw., sie auf eine bekannte Form zu bringen. Sodann macht man die Operation wieder rückgängig, um den Wert der Reihe zu finden.

Beispiel:

$$y = 3x - \frac{5x^3}{3!} + \frac{7x^5}{5!} - \dots,$$

$$\int y dx = \frac{3x^2}{2!} - \frac{5x^4}{4!} + \frac{7x^6}{6!} + \dots,$$

$$\int dx \int y dx = \frac{x^3}{2!} - \frac{x^5}{4!} + \frac{x^7}{6!} - \dots,$$

$$\frac{1}{x} \int dx \int y dx = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} = 1 - \cos x.$$

$$\int dx \int y dx = x - x \cos x,$$

$$\int y dx = 1 - \cos x + x \sin x,$$

$$y = 2 \sin x + x \cos x.$$

Taylorische Reihe.

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \dots$$

Spezialfall.

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots$$

5. Fouriersche Reihen.

Erfüllt eine Funktion $f(x)$ im Intervall $-l$ bis $+l$ die *Dirichlet'schen Bedingungen* [d. h. hat $f(x)$ dort nicht unendlich viele Maxima und Minima und bleibt trotz endlich vieler Unendlichkeits- und Unstetigkeitsstellen $\int |f(x)| dx$ konvergent], so ist $f(x)$ in diesem Intervall mit Ausnahme der Unstetigkeitsstellen darstellbar in der Form:

$$(1) \quad f(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right],$$

wobei

$$(2) \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{+l} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{+l} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

oder auch in der Form:

$$(1a) \quad f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{\frac{i n \pi x}{l}},$$

wobei

$$(2a) \quad a_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{+l} f(x) e^{-\frac{i n \pi x}{l}} dx.$$

6. Fouriersches Integral.

Läßt man l unbegrenzt wachsen, so wird

$$(3) \quad F(x) = \int_0^{\infty} [A(\nu) \cdot \sin(\nu \pi x) + B(\nu) \cdot \cos(\nu \pi x)] \cdot d\nu,$$

wobei

$$(4) \quad A(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \sin(\nu \pi x) dx, \quad B(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \cos(\nu \pi x) dx$$

oder auch

$$(3a) \quad F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\nu) e^{i \nu \pi x} d\nu,$$

wobei

$$(4a) \quad \varphi(\nu) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) e^{-i \nu \pi x} dx.$$

Zusammengefaßt wird:

$$(5) \quad F(x) = \int_0^{\infty} d\nu \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) \cos(\nu \pi (t-x)) dt$$

oder auch

$$(5a) \quad F(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{i \nu \pi (t-x)} dt.$$

Ist eine Funktion $f(x)$ definiert als gebildet durch regelmäßige Wiederholung einer aperiodischen Funktion $F(x)$ im Abstand $2l$, d. h.

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} F(x + 2p l),$$

wo p alle positiven und negativen ganzen Zahlen durchläuft, so ist $f(x)$ eine periodische Funktion:

$$f(x + 2p l) = f(x).$$

In der dann möglichen Darstellung

$$(6) \quad f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{\frac{i\pi n x}{l}}$$

und

$$(6a) \quad F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(v) e^{i v \pi x} dv$$

besteht dann folgender Zusammenhang zwischen den Koeffizienten α_n der Reihe für $f(x)$ und dem Funktionswerte $\varphi(v)$ des Integrals für $F(x)$

$$(7) \quad \alpha_n = \frac{1}{l} \varphi\left(\frac{n}{l}\right).$$

7. Zweidimensionale Fouriersche Reihen und Integrale.

Eine von zwei Variablen x und y abhängige Funktion $f(x, y)$, die sowohl in x wie in y periodisch ist, so daß $f((x + 2lL), (y + 2mM)) = f(x, y)$ ist, wo l und m ganze Zahlen, $\pm L$ und $\pm M$ die Grenzen des Periodenintervalls sind, und die die Dirichletschen Bedingungen erfüllt, ist darstellbar in der Form:

$$(1) \quad f(x, y) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{lm} \cdot \cos \frac{l\pi x}{L} \cdot \cos \frac{m\pi y}{M} + b_{lm} \cdot \sin \dots \cos \dots \\ + c_{lm} \cdot \cos \dots \sin \dots \\ + d_{lm} \cdot \sin \dots \sin \dots,$$

wo

$$(2) \quad a_{lm} = \frac{1}{LM} \int_{-L}^{+L} \int_{-M}^{+M} f(s, t) \cdot \cos \frac{l\pi s}{L} \cdot \cos \frac{m\pi t}{M} ds dt,$$

$$a_{00} = \frac{1}{4LM} \iint f(s, t) ds dt, \quad a_{0m} = \frac{1}{2LM} \iint f(s, t) \cos \frac{m\pi t}{M} ds dt.$$

Für die b_{lm} , c_{lm} , d_{lm} gelten entsprechende Formeln.
Für $L = \infty$ wird:

$$(3) \quad f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} du \sum_m \left(a_m(u) \cdot \cos ux \cos \frac{m\pi y}{M} + \dots \right)$$

bzw.

$$(4) \quad f(x, y) = \int_0^{\infty} du \sum_m \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} ds dt f(s, t) \cdot \cos u \pi s \cdot \cos \frac{m\pi t}{M} \cos \pi ux \cos \frac{m\pi y}{M} + \dots,$$

für $L = M = \infty$ wird:

$$(5) \quad f(x, y) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} du dv \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s, t) \cdot \cos u \pi (x - s) \cos v \pi (y - t) ds dt.$$

Oder auch

$$(1a) \quad f(x, y) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_{lm} e^{i\pi \left(\frac{lx}{L} + \frac{my}{M} \right)},$$

wobei

$$(2a) \quad \alpha_{lm} = \frac{1}{4LM} \int_{-L}^{+L} \int_{-M}^{+M} f(x, y) e^{-i\pi \left(\frac{lx}{L} + \frac{my}{M} \right)} dx dy$$

und für $L = \infty$

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} du \sum_0^{\infty} a_m(u) e^{i\pi u x} \cdot e^{\frac{i\pi m y}{M}}$$

mit

$$(4a) \quad a_m(u) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int f(x, y) e^{-i\pi \left(ux + \frac{my}{M} \right)} dx dy$$

und für $L = \infty, M = \infty$

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} a(u, v) e^{i\pi (ux + vy)} du dv$$

mit

$$(5a) \quad a(u, v) = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \int f(x, y) e^{-i\pi (ux + vy)} dx dy.$$

Literatur.

Knopp, Unendliche Reihen. Berlin: Julius Springer. — Lehrbücher der Differentialrechnung s. S. 24. — *Courant-Hilbert* s. S. 12.

Vierter Abschnitt.

Funktionen.

A. Allgemeine Funktionentheorie.

1. Komplexe Größen.

Definition: Die formal gebildete Summe $a + ib$ einer reellen Zahl a und einer imaginären Zahl ib ($i = \sqrt{-1}$) heißt eine „komplexe“ Zahl $c = a + ib$, $|c| = \sqrt{a^2 + b^2}$ heißt ihr (absoluter) „Betrag“.

a heißt der *Realteil*, b der *Imaginärteil* (in Zeichen $a = \Re c$, $b = \Im c$).

Geometrisch veranschaulicht man sich die komplexe Zahl c

1. durch einen *Punkt* der komplexen xy -Ebene, dessen rechtwinklige Koordinaten $x = a$, $y = b$ sind.

$|c|$ bedeutet den Betrag des Abstandes r vom Punkt c bis zum Nullpunkt.

Es ist also (Fig. 1)

$$a = r \cos \varphi$$

$$b = r \sin \varphi$$

$$a + ib = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = r e^{i\varphi},$$

$$\text{wo } r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

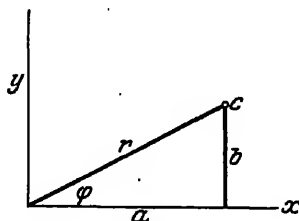


Fig. 1.

$$\varphi = \arctg \frac{b}{a}. \quad \varphi \text{ heißt Argument, Amplitude oder Arkus.}$$

2. Durch einen *Vektor* vom Nullpunkt, dessen Komponenten gleich a , bzw. b sind¹⁾.

$c_1 + c_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2)$ ist dann ein Vektor, der durch Vektoraddition (vgl. S. 153) der Vektoren c_1 und c_2 entsteht.

$c_1 \cdot c_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$ ist ein Vektor, dessen Argument φ gleich der Summe derjenigen von c_1 und c_2 ist und dessen Betrag gleich dem Produkt der Beträge von c_1 und c_2 ist.

Zwei komplexe Größen heißen nur dann gleich, wenn sowohl ihre Realteile wie ihre Imaginärteile gleich sind oder sowohl ihre Beträge wie ihre Argumente (modulo 2π).

¹⁾ besonders in der Form: $A \cdot e^{i\omega t} = r e^{i(\varphi + \omega t)}$. Bedeutet t die Zeit, so dreht sich der Vektor mit gleichförmiger Geschwindigkeit um den Nullpunkt.

Ist $c_1 = c_2 \cdot C$ oder $\frac{c_1}{c_2} = C = C_0 \cdot e^{i\alpha}$, wo C_0 reell sei, so ist C_0 das Verhältnis der Beträge $\left| \frac{c_1}{c_2} \right|$ und α der Winkel zwischen den beiden Vektoren: $\alpha = \varphi_1 - \varphi_2$.

$\bar{c} = a - ib$ heißt „konjugiert komplex“ zu $c = a + ib$.

Daraus folgt:

$$a = \frac{c + \bar{c}}{2} = \Re c$$

$$b = \frac{c - \bar{c}}{2i} = \Im c$$

$$\sqrt{c\bar{c}} = \sqrt{a^2 + b^2} = |c| = |\bar{c}|.$$

2. Analytische Funktionen.

Eine Funktion $f(z) = u + iv$ der komplexen Variablen $z = x + iy$ heißt in einem Bereich „analytisch“, wenn sie dort stetig ist und wenn

(1) 1. Definition: $\frac{df(z)}{dz} = \lim_{h, k \rightarrow 0} \frac{f(x+h+i(y+k)) - f(x+iy)}{h+ik}$ einen Wert

hat, der von der Art des Grenzüberganges (dem Wege, wie h und k gegen Null gehen) unabhängig ist und der von z stetig abhängt.

(2) 2. Definition: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ ist und diese Differentialquo-

tienten stetige Funktionen von x und y sind.

Die beiden Definitionen sind gleichwertig.

In Punkten, in denen die obigen Forderungen nicht erfüllt sind, heißt die Funktion „irregulär“ oder „singulär“.

Eine analytische Funktion einer analytischen Funktion ist wieder eine solche. Auch die zu $f(z)$ inverse Funktion $\varphi(z)$ (definiert durch $\varphi(fz) = f(\varphi z) = z$) ist eine analytische.

Durch eine analytische Funktion $f(z) = u + iv$ werden u und v als Funktionen von x und y festgelegt:

$$(3) \quad u = f_1(x, y), \quad v = f_2(x, y).$$

Man findet diese, indem man $f(x + iy)$ in die Form $f_1(x, y) + i f_2(x, y)$ bringt.

f_1 und f_2 heißen zueinander „konjugierte“ Potential-Funktionen. Es gilt für diese unter Heranziehung der 2. Definition

$$(4) \quad \Delta f_1 = \Delta f_2 = 0, \quad \text{wo} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Jede beliebige analytische Funktion f liefert daher zwei partikuläre Lösungen der Gleichung $\Delta \varphi = 0$ (im Zweidimensionalen).

Für eine analytische Funktion $f(z) = u + iv$ ist, wenn $f(z)$ für reelles z reell ist,

$$f(\bar{z}) = u - iv$$

und daher

$$u = \frac{f(z) + f(\bar{z})}{2}; \quad v = \frac{f(z) - f(\bar{z})}{2i}.$$

Durch eine analytische Funktion f wird dem Wertepaar x, y ein solches u, v zugeordnet. Betrachtet man daher x, y als die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes in einer Ebene, u, v als die eines Punktes in einer zweiten Ebene, so vermittelt die Funktion f die *Abbildung* jedes Punktes oder aus Punkten gebildeten Systems (z. B. einer Kurve oder eines Flächenstücks) der x, y -Ebene auf die u, v -Ebene.

$f(z)$ vermittelt eine *konforme*, d. h. *winkeltreue* Abbildung (mit Erhaltung des Drehsinns), d. h. eine solche, bei der unendlich kleine reguläre Gebiete winkeltreu von der x, y -Ebene auf die u, v -Ebene abgebildet werden.

Unter dem Integral $\int_a^b f(z) dz$ versteht man:

$$(5) \quad \int_a^b f(z) dz = \int_a^b (u + iv)(dx + idy) = \int_a^b (u dx - v dy) + i \int_a^b (v dx + u dy).$$

Die Integrale sind längs einer bestimmten Kurve zwischen den Punkten a und b zu erstrecken.

Wegen der Definitionsgleichung (2) der analytischen Funktionen sind sowohl $(u dx - v dy)$ wie $(v dx + u dy)$ *totale Differentiale* (vgl. S. 15).

3. Cauchys Integralsatz.

$\int_a^b f(z) dz$ bleibt unverändert, wenn man unter Festhalten von a und b den Integrationsweg verschiebt, falls nicht diese Verschiebung über irreguläre Punkte geschieht.

Erfolgt die Integration über eine geschlossene Kurve (Zeichen \oint), d. h. ist $a = b$, so ist $\oint f(z) dz = 0$, wenn die Kurve keinen irregulären Punkt einschließt.

Integralformel.

$$(6) \quad f(\zeta) = \frac{1}{2i\pi} \oint \frac{f(z)}{z - \zeta} dz$$

gestattet die Berechnung von $f(z)$ für den Wert $z = \zeta$, wenn $f(z)$ auf dem Umfang einer den Punkt ζ umschließenden Kurve gegeben ist, welche keinen irregulären Punkt einschließt.

Spezialfall: $\oint (z - \zeta)^n dz$ ist $= 0$ außer für $n = -1$,

$$(7) \quad \oint \frac{dz}{z - \zeta} = 2i\pi.$$

Mittelwertsatz. Ist die Kurve ein Kreis und ist $u_0 + iv_0$ der Wert von $f(z)$ im Mittelpunkt, $u + iv$ der Wert auf dem Umfang (dargestellt als Funktion des Winkels ϑ), so ist

$$(8) \quad u_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u d\vartheta; \quad v_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v d\vartheta,$$

also u_0 bzw. v_0 der Mittelwert der u bzw. v auf dem Umfang des Kreises.

4. Potenzreihenentwicklung der analytischen Funktionen.

a) Entwicklung in der Umgebung regulärer Punkte.

Eine analytische Funktion gestattet in der Umgebung eines Punktes $z = z_0$, in dem sie regulär ist, folgende konvergente Entwicklung:

$$(9) \quad f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots,$$

wobei

$$(10) \quad a_n = \frac{1}{2i\pi} \oint \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}.$$

Die Entwicklung konvergiert nur, solange $|z - z_0|$ nicht größer als ein gewisser Wert R ist. R heißt der Radius des „Konvergenzkreises“.

Das die a_n bestimmende Integral ist zu erstrecken über eine einfach geschlossene Kurve, die z_0 , aber keine singulären Punkte umschließt.

Der Konvergenzkreis um z_0 geht durch den nächsten bei z_0 liegenden irregulären Punkt der Funktion $f(z)$.

Verschwinden die ersten n Koeffizienten der Entwicklung, a_0 bis a_{n-1} , nicht aber a_n , so heißt z_0 eine „Nullstelle n -ter Ordnung“ der Funktion $f(z)$.

Ist $f(z)$ im Unendlichen regulär (d. h. $f(\frac{1}{z})$ für $z = 0$), so gestattet $f(z)$ die Entwicklung

$$(11) \quad f(z) = a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \dots,$$

wobei

$$(12) \quad a_{-n} = \frac{1}{2i\pi} \oint f(\zeta) \zeta^{n-1} d\zeta.$$

Diese konvergiert *außerhalb* eines um den Nullpunkt beschriebenen Kreises, der durch den entferntesten irregulären Punkt läuft.

Das praktisch Wesentliche an diesen Entwicklungsmöglichkeiten ist, daß die Funktion innerhalb des Konvergenzbereiches auch schon durch

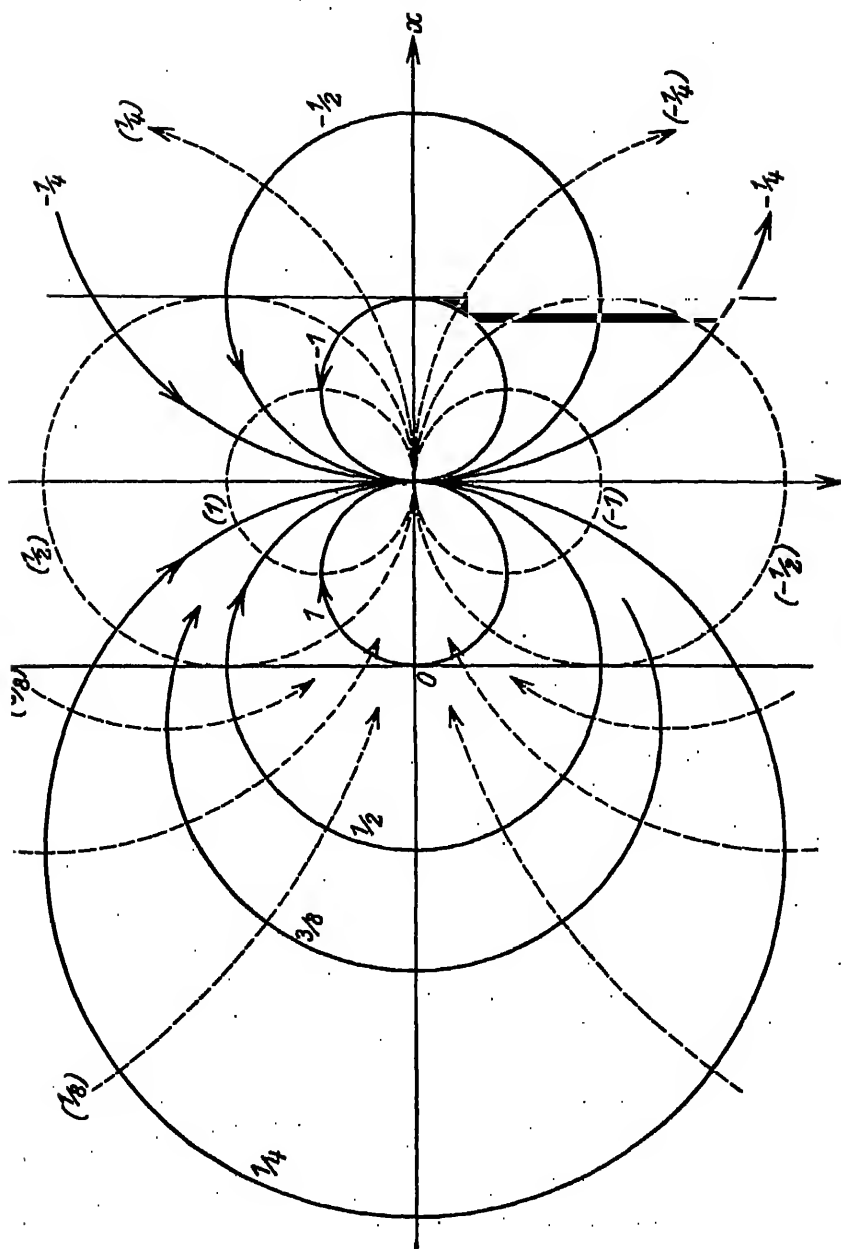


Fig. 2.

stattfindet. In Fig. 4 ist dieselbe Funktion, nach fallenden Potenzen entwickelt, gezeichnet. Hier ist innerhalb des Konvergenzkreises keine Annäherung vorhanden.

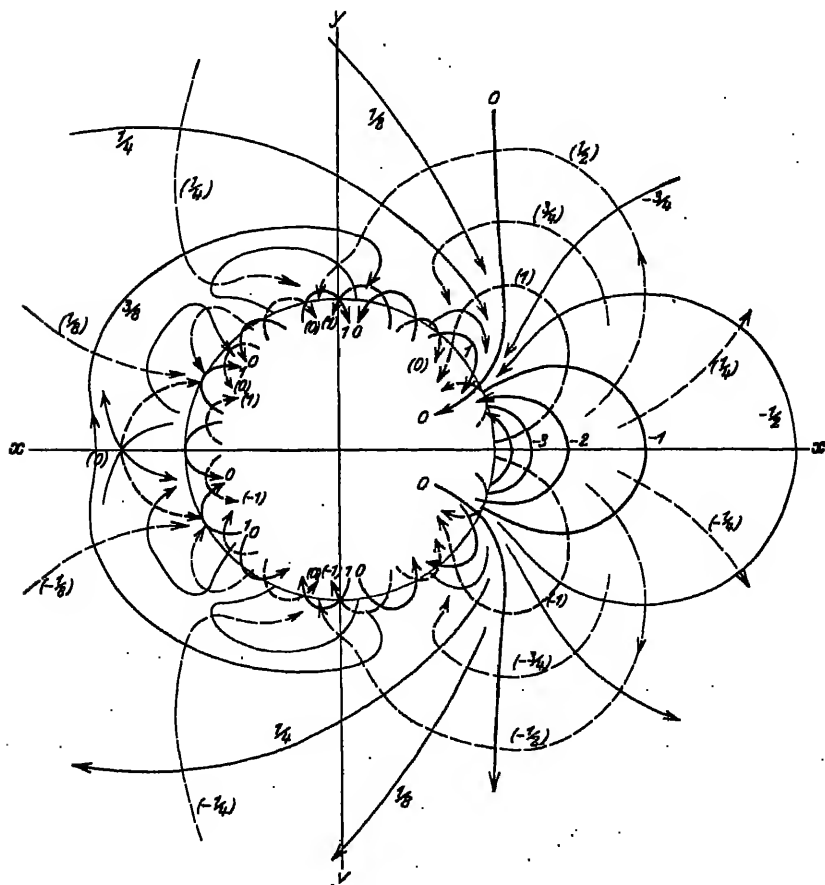


Fig. 4.

Analytische Fortsetzung. Durch die Entwicklung in der Umgebung von z_0 ist $f(z)$ zunächst nur innerhalb des Konvergenzkreises bestimmt. Geht man zu der Entwicklung um einen Punkt $z'_0 = z_0 + c$ über, so erhält man die Entwicklung

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z'_0 + c) + a_2(z - z'_0 + c)^2 + \dots$$

Löst man die einzelnen Klammerpotenzen $(z - z'_0 + c)^n$ nach dem binomischen Lehrsatz und ordnet nach Potenzen von $(z - z'_0)$, so erhält man eine Entwicklung der Form

$$f(z) = b_0 + b_1(z - z'_0) + b_2(z - z'_0)^2 + \dots$$

die in einem Kreise um z_0 konvergiert, der möglicherweise über den alten Kreis hinausragt. In dem den beiden Kreisen gemeinsamen Gebiete liefern beide Entwicklungen dieselben Werte. Die zweite Entwicklung heißt, soweit sie außerhalb des Konvergenzkreises des ersten konvergiert, „Fortsetzung“ der ersten. Durch Wiederholung dieses Verfahrens ist es möglich, die durch die Potenzreihe definierte Funktion über einen weiteren Bereich, eventuell über die gesamte Ebene fortzusetzen. Es gibt Fälle, in denen eine Fortsetzung über eine bestimmte Grenze nicht möglich ist.

b) Entwicklung in der Umgebung nicht regulärer Punkte.

In der Umgebung eines „*m-fachen Pols*“ in $z = z_0$ gestattet die Funktion folgende Entwicklung:

$$(13) \quad f(z) = a_{-m}(z - z_0)^{-m} + a_{-(m-1)}(z - z_0)^{-m+1} + \dots \\ + a_{-1}(z - z_0)^{-1} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

In der Umgebung eines „*Verzweigungspunktes*“ in $z = z_0$ gilt folgende Entwicklung:

$$(14) \quad f(z) = a_0(z - z_0)^{\frac{\alpha}{\nu}} + a_1(z - z_0)^{\frac{\alpha+1}{\nu}} + a_2(z - z_0)^{\frac{\alpha+2}{\nu}} + \dots$$

wo ν eine beliebige positive, α eine beliebige positive oder negative ganze Zahl ist.

In der Umgebung eines „*wesentlich singulären*“ Punktes in $z = z_0$ ist keine Reihenentwicklung nach steigenden Potenzen von $(z - z_0)$ möglich.

Durch diese Entwicklungsmöglichkeiten ist der Charakter eines irregulären Punktes definiert. Der Charakter der Funktion im ∞ fernen Punkt ($z = \infty$) wird durch die Entwicklungsmöglichkeiten von $f\left(\frac{1}{z}\right)$ an der Stelle $z = 0$ gekennzeichnet.

Residuum. Der Koeffizient a_{-1} der Potenzreihenentwicklung in der Umgebung eines Poles heißt „*Residuum*“ des Poles.

Es gilt

$$(15) \quad a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint f(z) dz.$$

Hierbei ist der Integrationsweg eine Kurve, welche keine irreguläre Stelle außer dem Pol einschließt.

Als Residuum des ∞ fernen Punktes bezeichnet man den Koeffizienten $-a_1$ der in der Umgebung dieses Punktes gültigen Entwicklung

¹⁾ Diese Formel ist praktisch von besonderer Bedeutung, weil sie die Berechnung des Integrals $\oint f(z) dz$ zurückführt auf die Entwicklung der Funktion in der Umgebung eines Poles.

$$(16) f(z) = a_{-m} z^m + a_{-m+1} z^{m-1} + \dots + a_{-1} z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots,$$

falls dort die Funktion regulär ist oder nur einen Pol hat.

Residuensatz. Ist $f(z)$ in einem von einer oder mehreren stetigen Kurven berandeten Gebiet überall eindeutig und bis auf endlich viele

Pole im Innern regulär, so ist $\frac{1}{2\pi i} \oint f(z) dz$ erstreckt über die Berandung des Gebietes gleich der Summe der Residuen der Pole dieses Gebietes. Ist $f(z)$ überall eindeutig und bis auf endlich viele Pole regulär, so ist die Summe der zu den Polen und zum unendlich fernen Punkt gehörigen Residuen gleich Null.

Laurentsche Reihe. Für einen ringförmigen Bereich (zwischen zwei konzentrischen Kreisen K und k um $z=0$), innerhalb dessen $f(z)$ regulär ist, konvergiert die Reihe

$$(17) f(z) = \dots + \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots,$$

wobei

$$(18) \quad \begin{cases} a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_K \frac{f(z) dz}{z^{n+1}} & (n = 0, 1, 2, \dots), \\ a_{-n} = \frac{1}{2i\pi} \int_k z^{n-1} f(z) dz & (n = 1, 2, 3, \dots). \end{cases}$$

5. Berechnung bestimmter Integrale durch Integration im Komplexen.

Gegeben sei ein reelles bestimmtes Integral $I = \int_a^b f(x) dx$. Ist $f(z)$ in einem die Strecke $a \rightarrow b$ der reellen Achse enthaltenden Gebiet der komplexen z -Ebene analytisch, so ist $I = \int_a^b f(z) dz$ ein in der komplexen Ebene auszuführendes Integral zwischen den Punkten a und b der reellen Achse. Als Integrationsweg kann man dann jeden beliebigen nehmen, der durch Verzerrung des ursprünglichen reellen Weges bei Festhaltung der ursprünglichen reellen Grenzen a und b entsteht, falls die Verzerrung nicht über einen singulären Punkt von $f(z)$ hindergeführt hat. Es lassen sich häufig komplexe Wege von a nach b finden, längs derer die Integration bequemer, als längs des reellen Weges auszuführen ist.

Um die Verzerrung auch über singuläre Punkte hinwegführen zu können, muß man so verfahren, wie die Figur zeigt: Man ersetzt den reellen Weg $a \rightarrow b$ durch drei komplexe Stücke, 1. den verlangten Umweg, 2. einen (beliebig kleinen) Kreis um den singulären Punkt,

3. die Zuwege zu dem singulären Punkt. Der Anteil des Weges 2 ist gleich $2\pi i$ mal dem Residuum des singulären Punktes; der Anteil des Weges 3 (Hin- und Rückweg) verschwindet.

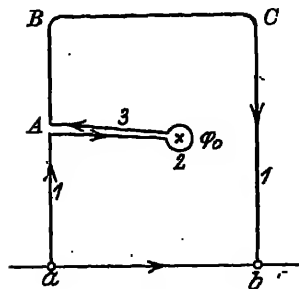


Fig. 5.

Durch Einführung einer neuen geeigneten Variablen $\varphi(z)$ statt z (Abbildung von der z -Ebene auf eine φ -Ebene) kann oft eine weitere Vereinfachung erzielt werden (z. B. so, daß das Integral über den Weg 1 ganz verschwindet, letzteres besonders dann, wenn die neue Variable zu einem geschlossenen Integrationsweg führt). — Gelegentlich kann man den Integrationsweg so legen, daß nur kleine Stücke des Weges wesentliche Beiträge zum Gesamtwert I liefern, und zwar Stücke, wo der

Integrand (näherungsweise) in einfacher Form geschrieben werden kann (Methode der Sattelpunkte). Es sind noch andere Kunstgriffe möglich, z. B. das neue Integral als reellen Teil eines einfacheren komplexen Integrals aufzufassen¹⁾.

Beispiel für komplexe Integration:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 + \varepsilon \cos \varphi},$$

wo ε reell ist und zwischen 0 und 1 liegt.

Wir fassen $\varphi = \alpha + i\beta$ als komplexe Variable auf. Dann ist der Integrationsweg vom Punkte $\varphi = 0$ zum Punkt 2π der reellen Achse zu erstrecken (Fig. 5). Dieser Weg kann verzerrt werden in den Weg über ABC . Um hierbei nicht über den singulären Punkt φ_0 ($\cos \varphi_0 = -\frac{1}{\varepsilon}$, $\operatorname{Im} \beta_0 = \frac{1}{\varepsilon}$, $\alpha_0 = \pi$) hinwegzugehen, ist von A aus der Weg zu φ_0 , um dieses in einem Kreis herum und längs des Zuweges wieder nach A geführt.

Das Integral verschwindet für die beiden Stücke parallel der imaginären Achse wegen der Periodizität von $\cos \varphi$, ferner für das Stück BC , wenn das Stück unendlich weit hinausgeschoben wird, weil hier der Integrand verschwindet, außerdem für die Zuwege. Es bleibt also nur das Stück um φ_0 herum zu berechnen.

In φ_0 hat der Integrand einen einfachen Pol. Die Entwicklung lautet hier:

$$\frac{1}{1 + \varepsilon \cos \varphi} = \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi_0 - \cos \varphi} = \frac{a_{-1}}{\varphi - \varphi_0} + a_0 + a_1(\varphi - \varphi_0) + \dots$$

¹⁾ Beispiele der Anwendung auch bei physikalischen Untersuchungen vgl. A. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien, Zusatz 7. Ferner A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. 44, 177, 1914. L. Brillouin, Ann. d. Phys. 44, 203, 1914. P. Debye, Math. Ann. 67, 535, 1910.

Um a_{-1} , das Residuum, zu finden, multiplizieren wir mit $\varphi - \varphi_0$ und gehen zur Grenze $\varphi = \varphi_0$ über:

$$\begin{aligned} a_{-1} &= \frac{(\varphi - \varphi_0) \cos \varphi_0}{\cos \varphi_0 - \cos \varphi} \Big|_{\lim (\varphi - \varphi_0) = 0} = \frac{1}{\sin \varphi_0} \cdot \cos \varphi_0 = -\frac{1}{s \sqrt{1 - s^2}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{s^2 - 1}} = -\frac{i}{\sqrt{1 - s^2}}. \end{aligned}$$

Das gesuchte Integral ist dann gleich

$$2\pi i a_{-1} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - s^2}}.$$

Zum gleichen Resultate kommt man auf folgendem Wege:

Setzt man $z = e^{i\varphi}$, so wird das Integral $= \int \frac{-i dz}{z \left[1 + \frac{s}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \right]}$. Der

Integrationsweg ist ein Kreis mit dem Radius 1 um den Nullpunkt. Singuläre Punkte liegen an den Stellen der Wurzeln z_1 und z_2 der Gleichung $z^2 + \frac{2}{s}z + 1 = 0$, wo der Integrand unendlich wird. Von

diesen liegt nur $z_1 = -\frac{1}{s} + \sqrt{\frac{1}{s^2} - 1}$ im Innern des Integrationsweges. Die Entwicklung lautet hier:

$$\frac{-i}{\frac{s}{2}(z - z_1)(z - z_2)} = \frac{a_{-1}}{z - z_1} + a_0 + a_1(z - z_1) + \dots,$$

also ist

$$a_{-1} = \frac{-i}{\frac{s}{2}(z_1 - z_2)} = \frac{-i}{s \sqrt{\frac{1}{s^2} - 1}} = \frac{-i}{\sqrt{1 - s^2}}$$

und das Integral wird

$$2\pi i a_{-1} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - s^2}}.$$

6. Veranschaulichung komplexer Funktionen.

(Vgl. Fig. 2—14.)

Die funktionale Abhängigkeit $w = f(z) = u + iv$ von $z = x + iy$ veranschaulicht man sich geometrisch in folgenden zwei Weisen¹⁾:

A. Man zeichnet in einem Koordinatensystem u, v die Kurven, die man erhält, wenn man die Geradenscharen $x = a$ und $y = b$

¹⁾ Die Darstellung A ist die übliche, um den Begriff der konformen Abbildung durch die Funktionen $f(z)$ zu veranschaulichen, andererseits entspricht B der üblichen graphischen Darstellung der Abhängigkeiten $u = f_1(x, y)$, $v = f_2(x, y)$.

punktweise abbildet, d. h. man zeichnet die Kurven $u + iv = f(a + iy)^1$ bzw. $u + iv = f(x + ib)$, wo a und b Parameter sind, denen man beliebige (praktisch äquidistante) Werte beilegt.

B. Man zeichnet in einem Koordinatensystem x, y die Kurven $u = f_1(x, y) = s$ und $v = f_2(x, y) = t$, wo s und t Parameter (wie oben) sind.

Die funktionale Abhängigkeit von $\varphi(u + iv) = z = x + iy$ der zu f inversen Funktion $\varphi [\varphi(f(z)) = z]$ wird durch dieselben Bilder veranschaulicht, nur mit vertauschter Bedeutung.

In beiden Fällen erhält man je zwei einander orthogonal schneidende Kurvenscharen. Aus ihrem Verlauf lassen sich alle charakteristischen Eigenschaften der Funktion $f(z)$ bzw. $\varphi(z)$ erkennen.

Faßt man die Kurven als Höhenlinien (Isohypsen) bzw. als Falllinien (Gradienten) einer Fläche auf, so haben diese Flächen überall, wo die Funktion regulär ist, folgende Eigentümlichkeiten:

1. Die Fläche hat nirgends ein Maximum (Gipfel) oder Minimum (Grube).

2. Jede Gradientenlinie fällt monoton von $+\infty$ bis $-\infty$.

Jede Kurve trennt ein „höheres“ von einem „niederen“ Gebiet. Wo hiervon eine Ausnahme zu sein scheint, setzen sich die hier zusammenstoßenden Flächenteile nach gegenseitiger Durchdringung weiter fort. Diese Durchdringungslinien endigen jeweils in zwei Punkten (von denen einer auch im Unendlichen liegen kann).

Wo eine Kurve in sich geschlossen zu sein scheint, ist sie tatsächlich entweder durch einen irregulären Punkt in zwei Teile geteilt oder sie setzt sich auf einer höheren oder tieferen Fläche fort (in z).

Die Flächen haben häufig *Sattelpunkte*, in denen ein Übergang aus einem „Tal“ in ein anderes über einen „Paß“ erfolgt. In solchen Sattelpunkten schneiden sich (scheinbar) zwei Falllinien bzw. Höhenlinien, also zwei Kurven der gleichen Schar, die dann denselben Parameter haben. In diesen Punkten ist die Forderung der Orthogonalität der beiden Kurvenscharen nicht erfüllt.

Die Kurve eines gegebenen Parameterwertes braucht nicht aus einem einzigen zusammenhängenden Stück zu bestehen.

Diese Merkmale haben die Kurven sowohl der Darstellung A wie B. Dabei ist es gleichgültig, welche der Kurvenscharen man als Höhenlinien und welche man als Falllinien auffaßt.

Eine andere Deutung der Kurven besteht darin, daß man die eine Schar als *Strömungslinien* einer zweidimensionalen Strömung betrachtet, die anderen als die Kurven konstanten Strömungspotentials.

¹⁾ Da eine solche Gleichung, indem man die Realteile bzw. die Imaginärteile gleichsetzt, eigentlich zwei Gleichungen darstellt, kann man y eliminieren und erhält eine Gleichung $F(u, v) = a$.

Seien z. B. die Kurven $v = \text{const}$ die Potentialkurven, so sind:

$$v_u = \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{und} \quad v_v = \frac{\partial v}{\partial y}$$

die Komponenten des Strömungsvektors v (vgl. Abschnitt „Vektoranalysis“). Wegen $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ und $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$ ist v parallel zu $u = \text{const}$; ferner wegen $\Delta v = 0$ ist $\text{div } v = 0$, und wegen $v = \text{grad } v$ wird $\text{rot } v = 0$. Die Strömung ist also wirbel- und quellenfrei.

Die singulären Stellen werden dann Quellen- oder Wirbelpunkte, d. h. Stellen, wo $\text{div } v \neq 0$ oder $\text{rot } v \neq 0$ ist.

Betrachtet man die Kurven der

Darstellung A,

so kann man über die Lage und Natur der charakteristischen Stellen folgendes aussagen: Die Funktion hat einen *Nullpunkt* für die Werte der Funktion x, y , deren Kurven durch den Nullpunkt $u = v = 0$ verlaufen. Endigen hier die Kurven, d. h. kehren sie hier ihre Richtung um, so haben wir einen zweifachen Nullpunkt. Dann ist die Darstellung nicht in einer u, v -Ebene vollständig, sondern in einem zweiten „*Riemannschen Blatt*“ zu ergänzen. Benachbarte Kurven wenden hier scharf um. Geschieht dies um den Winkel $n \cdot \pi$, so liegt ein n -facher Nullpunkt vor. (Beispiel: \sqrt{x}).

Hat die Funktion mehrere Nullpunkte, so ist die Darstellung A nur in mehreren Blättern möglich. In jedem sind die Nullpunkte gesondert zu betrachten.

Die Funktion hat *Pole* für die Werte x, y , deren Kurven durch den unendlich fernen Punkt $u = v = \infty$ verlaufen. Man erkennt den Verlauf durch Darstellung der Funktion $f\left(\frac{1}{x}\right)$. Für die mehrfachen Pole gilt hier dasselbe wie oben für die Nullpunkte.

Die Funktion hat *Verzweigungsstellen* für die Werte x, y , deren Kurven durch einen Sattelpunkt laufen. Die Zahl ν der Entwicklung in einem ν -fachen Verzweigungspunkt ist gleich der Zahl der im Sattelpunkt zusammenlaufenden Täler.

Kommt eine Kurve gegebenen Parameterwertes in n getrennten Teilen vor, so ist die Funktion n -deutig.

Bequemer ist die Ablesung der Eigenschaften aus der

Darstellung B.

Nullpunkte sind die Schnittstellen der Kurven $u = 0, v = 0$. Ist dies zugleich ein Sattelpunkt mit n Tälern, so haben wir einen n -fachen Nullpunkt.

Einfache Pole haben den Charakter einer „Doppelquelle“ (oder einer unendlich hohen Spitze der Fläche mit einem unmittelbar benach-

barten unendlich tiefen „Loch“), n -fache Pole den Charakter eines Quellsystems, das aus n Quellen und n Senken in unendlich enger symmetrischer Anordnung besteht. Aus einem Pol entspringen Kurvenbündel aller Parameterwerte $u = a$, die dann hier rückwärts wieder einmünden. Aus einem n -fachen Pol entspringen n solcher Bündel.

Verzweigungspunkte haben ähnlichen Charakter wie Nullpunkte der Darstellung A, d. h. in ihnen biegen die Kurven scharf um.

Wesentlich singuläre Stellen haben andere Eigentümlichkeiten, z. B. wie Quellpunkte, von denen nach allen Seiten Strömung ausgeht ($\ln z$).

Ist die Darstellung nicht in einer Fläche möglich, so ist die Funktion mehrdeutig, n -deutig wenn dazu n Blätter gehören. In ν -fachen Verzweigungspunkten ist die Funktion im allgemeinen $(n - \nu)$ -deutig.

Bei der Darstellung A oder B in mehreren Blättern kann man durch geeignetes Zusammenfügen der aufgeschnittenen Flächen diese zu einem zusammenhängenden Gebilde (*Riemannsche Fläche*) vereinigen. Die Lage der Schnitte ist hierbei willkürlich, doch müssen diese in den Verzweigungspunkten endigen.

Eine andere Art der geometrischen Darstellung besteht in der Abbildung von geschlossenen Kurven (z. B. Kreisen) von der x, y -Ebene auf die u, v -Ebene. Diese erscheinen abgebildet wieder als geschlossene Kurven. Umschlingt eine solche Kurve einen Verzweigungspunkt einfach in der x, y -Ebene, so umschlingt sie den Bildpunkt mehrfach in der u, v -Ebene, ehe sie in sich zurückkehrt. Die Zahl der Umschlingungen gibt dann die Zahl der Blätter der Riemannschen Fläche an.

Um eine Funktion auch für $z = \infty$ zu veranschaulichen, ist es möglich, die x, y - bzw. u, v -Ebene auf eine Kugel zu projizieren, die die Ebene in einem Punkte, z. B. dem Nullpunkt berührt. Von dem dem Berührungspunkt diametralen Punkt auf der Kugel zieht man Strahlen, deren Schnittpunkte mit der Ebene und der Kugel dann eine eindeutige Zuordnung aller Punkte der Ebene zu denen der Kugel liefern (stereographische Projektion). Auch der Punkt $z = \infty$ ist dann auf die Kugel projiziert. Von der Kugel kann man sodann ebenso alle Punkte auf eine zweite die Kugel berührende Ebene projizieren. Die beiden Projektionen liefern je eine winkeltreue Abbildung. Die Abbildung der ersten Ebene auf die zweite, ist auch durch eine gebrochene lineare Funktion zu erreichen. Der unendlich ferne Punkt wird hierbei im Endlichen projiziert.

B. Spezielle Funktionen.

1. Klassifikation der Funktionen.

$w = az + b$ heißt *ganze lineare* Funktion.

$w = \frac{az+b}{cz+d}$ heißt *gebrochene lineare* Funktion.

$w = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$ heißt *ganze rationale* Funktion.

$w = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_{m-1} z + b_m}$ heißt *gebrochene rationale* Funktion.

Ist w Wurzel einer algebraischen Gleichung, deren Koeffizienten ganze rationale Funktionen sind, so heißt w eine *algebraische* Funktion.

Eine nicht algebraische Funktion heißt eine *transzendente*.

$w = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ heißt *ganze* transzendente Funktion, wenn die unendliche Potenzreihe für jeden endlichen Wert von z konvergiert.

2. Rationale Funktionen

und ihre Umkehrung. Die Umkehrungen sind im allgemeinen nicht rational.

1. Lineare ganze Funktionen

$$w = f(z) = az + b, \quad \text{Umkehrung: } z = \varphi(w) = \frac{w-b}{a}.$$

Veranschaulichung: Jede Gerade in der x, y -Ebene bildet sich als Gerade in der u, v -Ebene ab und umgekehrt. Durch Einführung neuer Koordinaten u, v mit Hilfe einer linearen Transformation (d. i. geometrisch eine Verschiebung, Drehung und Maßstabänderung) läßt sich die lineare Funktion auf die Form bringen:

$$w = z, \quad \text{Umkehrung: } z = w,$$

in welcher die x, y - und die u, v -Ebene identisch werden.

2. Ganze rationale Funktionen 2. Grades

$$w = f(z) = az^2 + bz + c$$

lassen sich durch lineare Transformation (wie oben) auf die Form bringen:

$$w = f(z) = z^2, \quad \text{Umkehrung: } z = \varphi(w) = \sqrt{w}.$$

$+z$ und $-z$ gehören zu ein und demselben Wert w . Daher wird die Hälfte der x, y -Ebene (z. B. die Halbebene $y > 0$) auf die

ganze u, v -Ebene abgebildet. Die Kurven

$$x = \text{const}, y = \text{const} \quad \text{bzw.} \quad u = \text{const}, v = \text{const}$$

haben in der

$$u, v\text{-Ebene} \quad \text{bzw.} \quad x, y\text{-Ebene}$$

die Gleichungen

$$(A) \quad \begin{cases} +u + \sqrt{u^2 + v^2} = 2x^2 \\ -u + \sqrt{u^2 + v^2} = 2y^2 \end{cases}$$

$$(B) \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = u \\ 2xy = v. \end{cases}$$

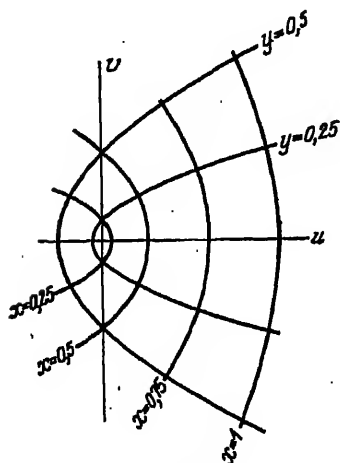


Fig. 6.

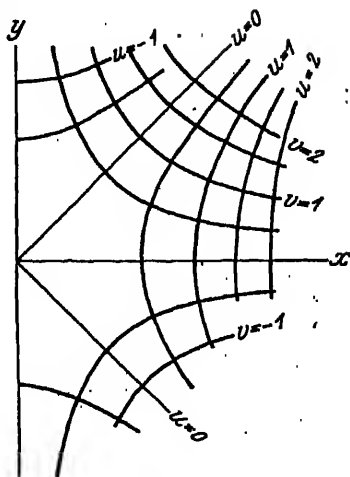


Fig. 7.

(A) gibt eine Schar von konfokalen Parabeln mit 0 als Brennpunkt (Fig. 6).

(B) gibt eine Schar von gleichseitigen Hyperbeln in der Halbebene $y > 0$ (Fig. 7).

Statt der Abbildung (A) und (B) von rechtwinklig gekreuzten Geradenscharen ist oft nützlich eine Abbildung rechtwinklig gekreuzter Kreisscharen und Radienvektoren:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x}, \quad \text{bzw.} \quad \varrho = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad \psi = \arctg \frac{v}{u}.$$

Das obige Beispiel $w = z^2$, $z = \sqrt{w}$ geht in diesen Polarkoordinaten dadurch über in

$$\varrho e^{i\psi} = r^2 e^{2i\varphi}, \quad \text{Umkehrung: } r e^{i\varphi} = \varrho^{\frac{1}{2}} e^{i\psi/2},$$

also

$$\varrho = r^2, \quad \psi = 2\varphi, \quad \text{,,} \quad r = \sqrt{\varrho}, \quad \varphi = \psi/2.$$

Es entsprechen also Kreise um den Nullpunkt und Radien in der ganzen u, v -Ebene den Kreisen und Radien in der Hälfte der x, y -Ebene.

3. Ganze rationale Funktion n -ten Grades. Als Beispiel nehmen wir

$$w = f(z) = z^n, \quad \text{Umkehrung: } z = \varphi(w) = \sqrt[n]{w}.$$

Die Abbildung der x, y -Ebene auf die u, v -Ebene wird auch hier besonders einfach in Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} \rho e^{i\psi} &= r^n e^{in\varphi}, & r e^{i\varphi} &= \rho^{1/n} e^{i\psi/n}, \\ \rho &= r^n, & \psi &= n\varphi, & r &= \sqrt[n]{\rho}, & \varphi &= \psi/n. \end{aligned}$$

Kreise um den Nullpunkt und Radien in der ganzen u, v -Ebene entsprechen den Kreisen und Radien im n -ten Teil der x, y -Ebene.

4. Von den gebrochenen rationalen Funktionen betrachten wir den Fall

$$w = f(z) = \frac{1}{z^2}, \quad \text{Umkehrung: } z = \varphi(w) = \frac{1}{\sqrt{w}}.$$

Die Kurven $x = \text{const}$, $y = \text{const}$, bzw. $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ sind bestimmt durch die Gleichungen:

$$(A) \quad \begin{cases} \frac{1}{u^2 + v^2} (+u + \sqrt{u^2 + v^2}) = 2x^2 \\ \frac{1}{u^2 + v^2} (-u + \sqrt{u^2 + v^2}) = 2y^2 \end{cases}$$

$$(B) \quad \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = u \\ \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} = v \end{cases}$$

und geben folgendes Kurvenbild in der u, v -Ebene bzw. x, y -Ebene.

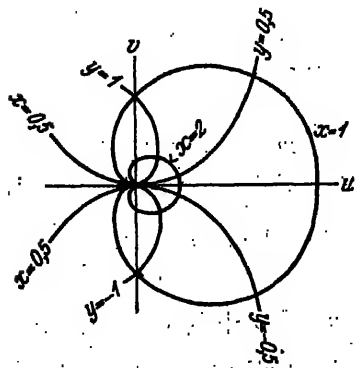


Fig. 8.

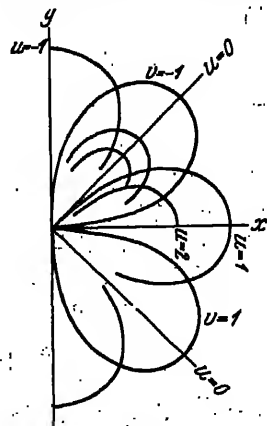


Fig. 9.

3. Nicht rationale algebraische Funktionen.

Als Beispiel führen wir an:

$$w = f(z) = \sqrt{1 - z^2}; \quad z = \varphi(w) = \sqrt{1 - w^2}.$$

$$(A) \quad \begin{cases} u^2 v^2 + x^2 (v^2 - u^2) = x^4 - x^2 \\ u^2 v^2 - y^2 (v^2 - u^2) = y^4 - y^2 \end{cases}$$

$$(B) \quad \begin{cases} x^2 y^2 + u^2 (y^2 - x^2) = u^4 - u^2 \\ x^2 y^2 - v^2 (y^2 - x^2) = v^4 - v^2 \end{cases}$$

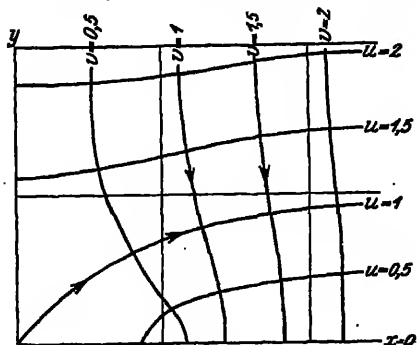


Fig. 10.

4. Transzendente Funktionen.

1. Exponentialfunktion und Logarithmus:

$$w = f(z) = e^z = \lim_{a \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{a}\right)^a, \quad \text{Umkehrung: } z = \varphi(w) = \ln w.$$

$$(A) \quad \begin{cases} \ln \sqrt{u^2 + v^2} = x \\ \operatorname{arctg} \frac{v}{u} = y \end{cases}$$

$$(B) \quad \begin{cases} e^u \cos y = u \\ e^u \sin y = v \end{cases}$$

Bei Vermehrung von z um $\pm 2i\pi$ behält $w = e^z$ seinen Wert bei. Daher wird bereits ein Streifen der Breite $y_1 - y_2 = 2\pi$ der x, y -Ebene auf die ganze u, v -Ebene abgebildet.

(A) System von Kreisen $r = \text{const}$ und Radien $\varphi = \text{const}$ in der ganzen u, v -Ebene:

$$r = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{v}{u}, \quad z = \lg r + i\varphi.$$

(B) System von Kurven in den Periodenstreifen $-\pi < y < +\pi$:

$$w = e^u (\cos y + i \sin y).$$

Durch Kombination zweier Exponentialfunktionen kommt man zu den

2. trigonometrischen Funktionen:

$$w = \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{und} \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos^2 z + \sin^2 z = 1$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}; \quad \operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

sowie ihren Umkehrungen $\arccos z$, $\arcsin z$, usw.

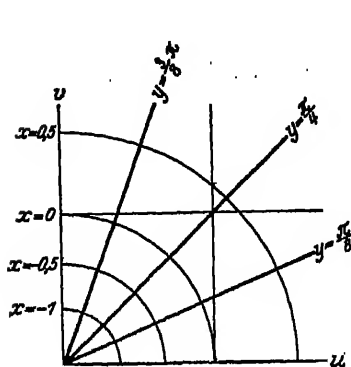


Fig. 11.

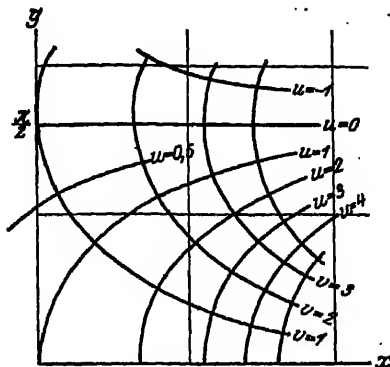


Fig. 12.

Von diesen betrachten wir:

$$w = \sin z, \quad \text{Umkehrung: } z = \arcsin w.$$

$$(A) \quad \begin{cases} \frac{u^2}{\sin^2 x} - \frac{v^2}{\cos^2 x} = 1 \\ \frac{u^2}{\cos^2 y} + \frac{v^2}{\sin^2 y} = 1. \end{cases}$$

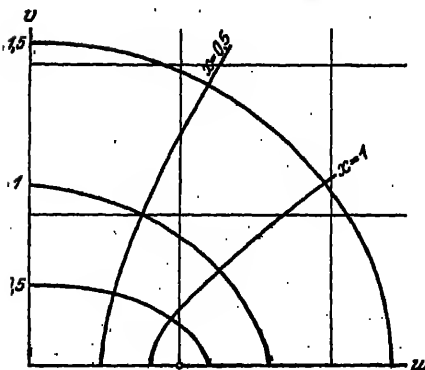


Fig. 13.

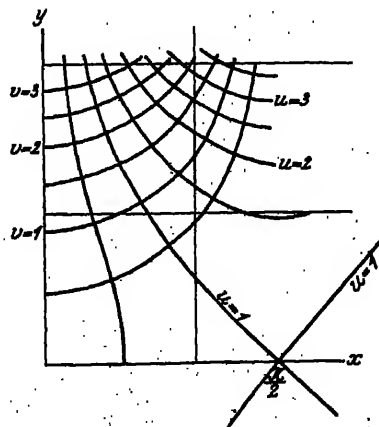


Fig. 14.

System von Ellipsen und Hyperbeln in der ganzen u, v -Ebene.

$$(B) \quad \begin{cases} \sin x \operatorname{Cof} y = u \\ \cos x \operatorname{Sin} y = v. \end{cases}$$

System von Kurven in dem Periodenstreifen $n\pi < x < (n+1)\pi$.

Wichtige Formeln:

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} \quad \sin 3x = \sin x (4 \cos^2 x - 1)$$

$$\operatorname{cotg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{cotg} x \operatorname{cotg} y \mp 1}{\operatorname{cotg} x \pm \operatorname{cotg} y} \quad \cos 3x = \cos x (1 - 4 \sin^2 x)$$

$$\sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cos \frac{x \mp y}{2} \quad \sin nx = n \sin x \cos^{n-1} x -$$

$$- \binom{n}{3} \sin^3 x \cos^{n-3} x +$$

$$+ \binom{n}{5} \sin^5 x \cos^{n-5} x - \dots$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \quad \cos nx = \cos^n x - \binom{n}{2} \sin^2 x \cos^{n-2} x +$$

$$+ \binom{n}{4} \sin^4 x \cos^{n-4} x - \dots$$

$$\sin \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}, \quad \cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$$

$$\operatorname{cotg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 - \cos x} = \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}, \quad \operatorname{cotg} 2x = \frac{\operatorname{cotg}^2 x - 1}{2 \operatorname{cotg} x}$$

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$\operatorname{tg} 3x = \frac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x}, \quad \operatorname{cotg} 3x = \frac{\operatorname{cotg}^3 x - 3 \operatorname{cotg} x}{3 \operatorname{cotg}^2 x - 1}$$

wenn n ungerade:

$$\sin^n x = \left(\frac{1}{2i}\right)^{n-1} \left[\sin nx - \binom{n}{1} \sin(n-2)x + \binom{n}{2} \sin(n-4)x - \right.$$

$$\left. - \binom{n}{3} \sin(n-6)x + \dots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \binom{n-1}{2} \sin x \right]$$

$$\cos^n x = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left[\cos nx + \binom{n}{1} \cos(n-2)x + \binom{n}{2} \cos(n-4)x + \dots \right.$$

$$\left. + \binom{n-1}{2} \cos x \right]$$

enn n gerade:

$$1^n x = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^{n-1}} \left[\cos nx - \binom{n}{1} \cos(n-2)x + \binom{n}{2} \cos(n-4)x - \dots \right. \\ \left. + (-1)^{\frac{n-2}{2}} \binom{n-2}{2} \cos 2x \right] + \left(\frac{n}{2} \right) \frac{1}{2^n}$$

$$s^n x = \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \left[\cos nx + \binom{n}{1} \cos(n-2)x + \binom{n}{2} \cos(n-4)x + \dots \right. \\ \left. + \left(\frac{n-2}{2} \right) \cos 2x \right] + \left(\frac{n}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

3. Hyperbolische Funktionen:

$$w = \operatorname{Cof} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad \text{und} \quad \operatorname{Sin} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{Cof}^2 z - \operatorname{Sin}^2 z = 1$$

$$\operatorname{Tg} z = \frac{\operatorname{Sin} z}{\operatorname{Cof} z}; \quad \operatorname{Cotg} z = \frac{\operatorname{Cof} z}{\operatorname{Sin} z}$$

Die Funktion $\operatorname{Sin} z$ wird durch das um 90° gedrehte Bild für z dargestellt.

4. Zusammenhang zwischen verschiedenen transzendenten Funktionen.

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha.$$

$$a^{i\alpha} = e^{i\alpha \ln a} = \cos(\alpha \ln a) + i \sin(\alpha \ln a).$$

$$e^{2n\pi i} = 1, \quad e^{(2n+1)\pi i} = -1. \quad (n \text{ ganzzahlig!})$$

$$a + ib = \varrho e^{i\varphi}, \quad \text{wo } \varrho = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{b}{a},$$

$$a = \varrho \cos \varphi, \quad b = \varrho \sin \varphi.$$

$$+ ib)^n = \varrho^n e^{in\varphi} = \varrho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

$$x = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}, \quad \operatorname{Sin} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \sin ix = i \operatorname{Sin} x, \quad \operatorname{Sin} ix = i \sin x.$$

$$x = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}, \quad \operatorname{Cof} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \cos ix = \operatorname{Cof} x, \quad \operatorname{Cof} ix = \cos x.$$

$$x = \frac{1}{i} \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}, \quad \operatorname{Tg} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \operatorname{tg} ix = i \operatorname{Tg} x, \quad \operatorname{Tg} ix = i \operatorname{tg} x.$$

$$\operatorname{Arc} \sin x = -i \ln(ix + \sqrt{1-x^2}); \quad \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2});$$

$$\sin(ix) = i \operatorname{Arc} \operatorname{Sin} x, \quad \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} ix = i \operatorname{arc} \sin x;$$

$$\operatorname{Cof} \cos x = -i \ln(x + i \sqrt{1-x^2}); \quad \operatorname{Ar} \operatorname{Cof} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1});$$

$$\cos(ix) = i \operatorname{Arc} \operatorname{Cof}(ix), \quad \operatorname{Ar} \operatorname{Cof}(ix) = -i \operatorname{arc} \cos(ix).$$

$$\operatorname{Arc} \operatorname{Tg} x = -\frac{i}{2} \ln \left(\frac{i-x}{i+x} \right), \quad \operatorname{Ar} \operatorname{Tg} x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right);$$

$$\operatorname{tg}(ix) = i \operatorname{Arc} \operatorname{Tg}(x), \quad \operatorname{Ar} \operatorname{Tg}(ix) = i \operatorname{arc} \operatorname{tg} x.$$

$$\begin{aligned}
 \ln(ix) &= \ln(x) + \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi i & \ln(x+iy) &= \ln\sqrt{x^2+y^2} \\
 \ln(-x) &= \ln(x) + (2n+1)\pi i & &+ \left(\arctg \frac{y}{x} + 2n\pi\right)i. \\
 x^i &= \cos(\ln x) + i \sin(\ln x) \\
 i^x &= \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) & \sqrt{i} &= \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i). \\
 (\cos \varphi \pm i \sin \varphi)^x &= \cos x(\varphi + 2n\pi) \pm i \sin x(\varphi + 2n\pi) = e^{\pm i \varphi x}.
 \end{aligned}$$

5. Berechnung einiger transzendenter Funktionen durch unendliche Reihen.

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots \quad (|z| < \infty)$$

$$\ln(1+z) = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - + \dots \quad (|z| \leq 1, z \neq -1)$$

$$\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = 2\left[z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \dots\right] \quad (|z| \leq 1, z \neq \pm 1)$$

$$\sin z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - + \dots \quad (|z| < \infty)$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - + \dots \quad (|z| < \infty)$$

$$\arcsin z = z + \frac{1}{2} \frac{z^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{z^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{z^7}{7} + \dots \quad (|z| \leq 1)$$

$$\arctg z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - + \dots \quad (|z| \leq 1, z \neq \pm i)$$

$$\frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{z}{2} + \frac{B_1 z^2}{2!} - \frac{B_2 z^4}{4!} + \dots \quad (|z| < 2\pi)$$

wo die B_n die Bernoullischen Zahlen bedeuten:

$$B_n = \frac{(2n)!}{2^{2n-1} \pi^{2n}} \left(1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \dots\right), \text{ d. h.}$$

$$B_1 = \frac{1}{6}; \quad B_2 = \frac{1}{30}; \quad B_3 = \frac{1}{42}; \quad B_4 = \frac{1}{30}; \quad B_5 = \frac{5}{66} \text{ usw.}$$

5. Kugelfunktionen¹⁾.

a) *Legendresche* oder „einfache“ Kugelfunktionen.

Allgemeine Definitionen.

Diese Kugelfunktionen sind ganze rationale Funktionen einer Variablen μ und eines ganzzahligen positiven²⁾ Parameters n . Sie werden bezeichnet mit $P_n(\mu)$. n heißt die Ordnung der Kugelfunktion. Man

¹⁾ Wegen numerischer Tabellen und weiterer Formeln vgl. z.B. Jahneke und Emde: Funktionentafeln S. 79.

²⁾ Für negativ s. S. 59.

kann eine Kugelfunktion auch betrachten als Funktion eines Winkels ϑ , indem $\mu = \cos \vartheta$ gesetzt wird.

Die Kugelfunktionen sind auf folgende verschiedene Weisen definiert:

1. $P_n(\cos \vartheta)$ sind die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung:

$$(1) \quad \frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\vartheta+r^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \cdot P_n(\cos \vartheta) \quad \text{für } |r| < 1$$

bzw.

$$(1a) \quad = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} P_n(\cos \vartheta) \quad \text{für } |r| > 1.$$

2. Setzt man $\mu = \cos \vartheta = \frac{x}{r}$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, so ist

$$(2) \quad P_n(\cos \vartheta) = \frac{(-1)^n}{n!} r^{n+1} \cdot \frac{\partial^n}{\partial x^n} \left(\frac{1}{r} \right).$$

3. Bildet man eine homogene Funktion n -ten Grades von r und $z = r \cos \vartheta$, die der Bedingung $\Delta H_n(r, z) = 0$ genügt, so ist

$$(3) \quad P_n(\cos \vartheta) = \frac{C}{r^n} \cdot H_n(r, z)^1$$

bis auf eine willkürliche Konstante C definiert.

$$(4) \quad 4. \quad P_n(\mu) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n [(\mu^2 - 1)^n]}{d\mu^n}.$$

$$(5) \quad 5. \quad P_n(\mu) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\mu \pm \cos \varphi \sqrt{\mu^2 - 1})^n d\varphi.$$

$$(6) \quad 6. \quad P_n(\mu) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\varphi}{(\mu \pm \cos \varphi \sqrt{\mu^2 - 1})^{n+1}}.$$

Bei 5. und 6. ist $+$ oder $-$ beliebig!

7. $P_n(\cos \vartheta)$ ist ein Spezialfall der allgemeinen Kugelfunktionen $Y_n(\varphi, \vartheta)$, (s. S. 59).

Transformiert man $\Delta V = 0$ auf Polarkoordinaten r, φ, ϑ (vgl. S. 86), setzt die Reihe $V = \sum_n r^n Y_n(\varphi, \vartheta)$ ein und sucht speziell solche Lösungen Y_n , welche von φ unabhängig sind und nur von $x = \cos \vartheta$ abhängen, so gelangt man zu der

8. Differentialgleichung

$$(7) \quad n(n+1)y + \frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{dy}{dx} \right) = 0$$

¹⁾ Auch $H'_n = \frac{1}{r^{n+1}} \cdot P_n(\cos \vartheta)$ erfüllt die Gleichung $\Delta H'_n = 0$.

oder

$$(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0.$$

(Legendresche Differentialgleichung).

Ihre allgemeine Lösung lautet:

$$(8) \quad y = AP_n(x) + BQ_n(x),$$

wo A und B willkürliche Konstanten sind und $x = \mu = \cos \vartheta$ geschrieben ist.

$$9. \quad P_n(\mu) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{n!}$$

$$(9) \quad \left[\mu^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} \mu^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} \mu^{n-4} + \dots \right].$$

Die Definitionen 1, 2, 4, 5, 6, 9 sind eindeutig, 3 und 8 lassen eine Konstante unbestimmt. 8 gestattet noch eine zweite Lösung, die *Kugelfunktion 2. Art* $Q_n(\mu)$.

Es ist üblich, die Konstanten so zu wählen, daß $P_n(1) = 1$ wird.

Rekursionsformel:

$$(10) \quad (n+1)P_{n+1} = (2n+1)\mu P_n - nP_{n-1}$$

oder:

$$P_{n+1} = \mu P_n + \frac{n}{n+1}(\mu P_n - P_{n-1}).$$

Differentialformel:

Schreiben wir $\frac{dP_n(\mu)}{d\mu} = P'_n$, so gilt

$$(11) \quad P'_n = \frac{n(\mu P_n - P_{n-1})}{\mu^2 - 1} = (n+1) \frac{(P_{n+1} - \mu P_n)}{\mu^2 - 1}.$$

$$P'_{n+1} - P'_{n-1} = (2n+1)P_n$$

$$\mu P'_n - P'_{n-1} = nP_n.$$

Spezielle Formeln:

$$P_0(\mu) = 1$$

$$P_1(\mu) = \cos \vartheta = \mu$$

$$P_2(\mu) = \frac{1}{4}(3 \cos 2\vartheta + 1) = \frac{1}{2}(3\mu^2 - 1)$$

$$P_3(\mu) = \frac{1}{8}(5 \cos 3\vartheta + 3 \cos \vartheta) = \frac{1}{2}(5\mu^3 - 3\mu)$$

$$P_4(\mu) = \frac{1}{64}(35 \cos 4\vartheta + 20 \cos 2\vartheta + 9) = \frac{1}{8}(35\mu^4 - 30\mu^2 + 3)$$

$$P_5(\mu) = \frac{1}{128}(63 \cos 5\vartheta + 35 \cos 3\vartheta + 30 \cos \vartheta)$$

$$= \frac{1}{8}(63\mu^5 - 70\mu^3 + 15\mu)$$

$$P_6(\mu) = \frac{1}{512} (231 \cos 6\vartheta + 126 \cos 4\vartheta + 105 \cos 2\vartheta + 50) \\ = \frac{1}{16} (231 \mu^6 - 315 \mu^4 + 105 \mu^2 - 5)$$

$$P_7(\mu) = \frac{1}{1024} (429 \cos 7\vartheta + 231 \cos 5\vartheta + 189 \cos 3\vartheta + 175 \cos \vartheta) \\ = \frac{1}{16} (429 \mu^7 - 693 \mu^5 + 315 \mu^3 - 35 \mu)$$

$$P_8(\mu) = \frac{1}{16384} (6435 \cos 8\vartheta + 3432 \cos 6\vartheta + 2772 \cos 4\vartheta \\ + 2520 \cos 2\vartheta + 1225) \\ = \frac{1}{128} (6435 \mu^8 - 12012 \mu^6 + 6930 \mu^4 - 1260 \mu^2 + 35).$$

Spezielle Werte:

$$P_n(1) = 1$$

$$P_{2n+1}(0) = 0$$

$$P_{2n}(0) = (-1)^n \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}.$$

Negatives Argument:

$$P_{2n}(-\mu) = P_{2n}(\mu)$$

$$P_{2n+1}(-\mu) = -P_{2n+1}(\mu).$$

Allgemeiner Verlauf der Kugelfunktionen im Bereich

$$1 > \mu > -1:$$

Die *Legendreschen* Kugelfunktionen sind oszillierend und ihr Betrag (außer für $\mu = \pm 1$) kleiner als 1.

$P_n(\mu)$ hat n reelle, voneinander verschiedene Nullpunkte zwischen -1 und $+1$.

Für gerade n sind die $P_n(\mu)$ gerade, für ungerade n ungerade Funktionen von μ (Fig. 15).

Integralsätze für Kugelfunktionen:

Es ist (*Orthogonalität der Kugelfunktionen*)

$$(12) \quad \int_{-1}^{+1} P_m(\mu) \cdot P_n(\mu) d\mu = 0 \quad \text{für } m \neq n \quad \int_{-1}^{+1} P_n^2(\mu) d\mu = \frac{2}{2n+1}.$$

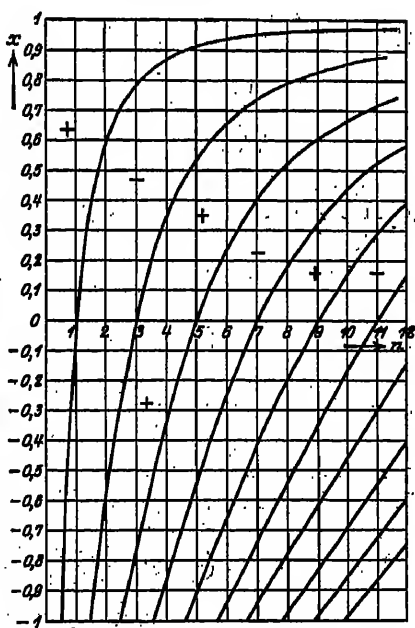


Fig. 15. Kurven: $P_n(x) = 0$.

Asymptotische Darstellung für große Werte von n :

$$(13) \quad P_n(\cos \vartheta) \sim \sqrt{\frac{2}{n\pi \sin \vartheta}} \cdot \sin \left\{ \left(n + \frac{1}{2} \right) \vartheta + \frac{\pi}{4} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Diese Formel gilt nicht mehr für die Umgebung von $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$.

b) Kugelfunktionen zweiter Art $Q_n(\mu) = Q_n(\cos \vartheta)$.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (Legendresche Diff.-Gl., vgl. S. 120)

$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0$$

lautet: $y = A P_n(x) + B Q_n(x)$.

Setzt man $y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots$, so fordert obige Gleichung die folgende Relation zwischen den A_i

$$(14) \quad A_{i+2} = \frac{(i-n)(n+i+1)}{(i+1)(i+2)} A_i.$$

Es bleiben also zwei A_i , z. B. A_0 und A_1 unbestimmt.

Es wird:

$$(15) \quad y = A_0 \left(1 - \frac{n(n+1)}{2!} x^2 - \frac{n(2-n)(n+1)(n+3)}{4!} x^4 - \dots \right) \\ + A_1 x \left(1 + \frac{(1-n)(n+2)}{3!} x^2 + \frac{(1-n)(3-n)(n+2)(n+4)}{5!} x^4 + \dots \right) \\ = A_0 p_n(x) + A_1 q_n(x).$$

Für geradzahliges n ist dann das endliche Polynom p_n , für ungerades n das endliche Polynom q_n (bis auf einen Faktor) identisch mit den Legendreschen Kugelfunktionen P_n . Dieser Faktor ist durch die übliche Normierung $P_n(1) = 1$ bestimmt, so daß

$$(16) \quad P_n = (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{1 \cdot 3 \dots n-1}{2 \cdot 4 \dots n} p_n \quad \text{für gerade } n,$$

$$(16a) \quad P_n = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1 \cdot 3 \dots n}{2 \cdot 4 \dots n-1} q_n \quad \text{für ungerade } n$$

wird. Für gerades n heißen dann die q_n , für ungerades n die p_n Kugelfunktionen 2. Art Q_n . Die Normierung kann analog erfolgen:

$$(17) \quad Q_n = (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{2 \cdot 4 \dots n}{1 \cdot 3 \dots n-1} q_n \quad \text{für gerade } n,$$

$$(17a) \quad Q_n = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{2 \cdot 4 \dots n-1}{1 \cdot 3 \dots n} p_n \quad \text{für ungerade } n.$$

Gelegentlich werden auch andere Normierungen benutzt

¹⁾ $f(x) \sim g(x)$ bedeutet $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Nach dieser Definition bricht die Reihe für $P_n(x)$ mit dem n -ten Gliede ab. $Q_n(x)$ ist durch eine unendliche Reihe dargestellt.

Hieraus ist $P_n(x)$ auch für $x > 1$ definiert, während dann die Reihe $Q_n(x)$ divergent wird. Hier konvergiert die Entwicklung:

$$(18) \quad Q_n(x) = \frac{n!}{1 \cdot 3 \dots (2n+1)x} \left(\frac{1}{x^{n+1}} + \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)} \frac{1}{x^{n+3}} + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2 \cdot 4 \cdot (2n+3)(2n+5)} \frac{1}{x^{n+5}} + \dots \right).$$

Es ist für $x^2 < 1$

$$(19) \quad Q_0(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right),$$

$$(20) \quad Q_1(x) = -1 + \frac{x}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right).$$

Es ist für $x^2 > 1$

$$(19a) \quad Q_0(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right),$$

$$(20a) \quad Q_1(x) = 1 - \frac{x}{2} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right).$$

Weitere Q_n folgen aus der Rekursionsformel:

$$(21) \quad (n+1)Q_{n+1} = (2n+1)xQ_n - nQ_{n-1}.$$

Spezielle Werte.

$$Q_n(1) = \infty,$$

$$Q_n(0) = 0 \text{ für gerades } n,$$

$$Q_n(\infty) = 0,$$

$$Q_n(-1) = -\infty.$$

Negativer Parameter n .

Wegen $p_{-n} = p_{n+1}$; $q_{-n} = q_{n-1}$ folgt:

$$(22) \quad P_{-(n+1)} = Q_n.$$

Die Kugelfunktionen 2. Art können daher auch als solche 1. Art mit negativem Parameter n aufgefaßt werden.

c) Allgemeine Kugelfunktionen.

Die allgemeinen Kugelfunktionen sind Funktionen zweier Variablen φ und θ (Polarkoordinaten) und eines Parameters n . Außerdem enthalten sie $2n+1$ willkürliche Konstanten. Sie werden bezeichnet mit $Y_n(\varphi, \theta)$.

Die allgemeinen Kugelfunktionen sind auf folgende Weisen zu definieren:

1. Man setzt

$$\cos \vartheta = \frac{z}{r}; \quad \cos \varphi \sin \vartheta = \frac{x}{r}; \quad \sin \varphi \sin \vartheta = \frac{y}{r}, \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Dann ist

$$(23) \quad Y_n(\varphi, \vartheta) = r^{n+1} \frac{\partial^n \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma}.$$

Hierbei ist $\alpha + \beta + \gamma = n$. Durch verschiedene Wahl der α, β, γ sind $2n + 1$ verschiedene Funktionen Y_n , die voneinander linear unabhängig sind, definiert.

2. Bildet man eine homogene Funktion n -ten Grades von x, y, z , $H_n(x, y, z)$, die die Bedingung

$$\Delta H_n = 0$$

erfüllt, so ist

$$Y_n(\varphi, \vartheta) = \frac{1}{r^n} H_n(x, y, z)$$

bis auf $2n + 1$ Konstanten definiert¹⁾.

3. Es ist

$$(24) \quad Y_n(\varphi, \vartheta) = \sum_{m=0}^n (A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi) \sin^m \vartheta \frac{d^m P_n(\cos \vartheta)}{d(\cos \vartheta)^m}.$$

Die Ausdrücke

$$(25) \quad \sin^m \vartheta \frac{d^m P_n(\cos \vartheta)}{d(\cos \vartheta)^m} = P_n^m(\cos \vartheta)^2$$

heißen „zugeordnete Funktionen“, sodaß man auch schreiben kann:

$$Y_n(\varphi, \vartheta) = \sum_{m=0}^n (A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi) P_n^m(\cos \vartheta).$$

Die A_m und B_m sind $2n + 1$ willkürliche Konstanten. Die Funktionen $\cos m\varphi P_n^m(\cos \vartheta)$ und $\sin m\varphi P_n^m(\cos \vartheta)$ heißen „symmetrische Kugelfunktionen“.

4. Die $Y_n(\varphi, \vartheta)$ sind Lösungen der Differentialgleichung:

$$(26) \quad n(n+1)Y_n + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial Y_n}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 Y_n}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Ist $\frac{\partial Y_n}{\partial \varphi} = 0$, so wird $Y_n = C \cdot P_n(\cos \vartheta)$.

¹⁾ Außer $r^n Y_n$ erfüllt auch $\frac{Y_n}{r^{n+1}}$ die Differentialgleichung: $\Delta H_n = 0$.

²⁾ Manche Autoren führen noch einen Faktor, z. B. $\frac{n!}{(n+m)!}$ ein.

Bedeutung von Y_n :

Aus 1. folgt, daß $Y_n(\varphi, \vartheta)$ das Potential auf der Kugel $r=1$ darstellt, wenn im Zentrum $r=0$ ein System von Dipolen liegt. Die *Legendreschen* Kugelfunktionen erhält man, wenn deren Achsen alle parallel zur z -Achse liegen.

d) Zugeordnete Kugelfunktionen.

Die zugeordneten Funktionen

$$P_n^m(\cos \vartheta) = \sin^m \vartheta \frac{d^m P_n(\cos \vartheta)}{d(\cos \vartheta)^m}$$

sind darzustellen durch

$$(25a) \quad \frac{\sin^m \vartheta}{2^n (n!)!} \frac{d^{n+m} (\mu^2 - 1)^n}{d\mu^{n+m}}$$

und als Integral durch

$$(25b) \quad \frac{(n+m)!}{n!} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\mu + \cos \varphi \sqrt{\mu^2 - 1})^n \cos m \varphi d\varphi.$$

Die zugeordneten Funktionen erfüllen die Differentialgleichung:

$$(27) \quad \left(n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} \right) y + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{dy}{d\vartheta} \right) = 0.$$

Statt dieser zugeordneten Funktionen führt *Helmholtz* die Funktionen

$$(28) \quad P_{nm} = \frac{d^m P_n(\mu)}{d\mu^m}$$

ein, welche die Differentialgleichung

$$(29) \quad (1 - \mu^2) \frac{d^2 y}{d\mu^2} - 2(m+1) \mu \frac{dy}{d\mu} + (n(n+1) - m(m+1)) y = 0.$$

erfüllen.

e) Integralsätze.

1. Sind $Y_n(\varphi, \vartheta)$ und $Y_m(\varphi, \vartheta)$ zwei beliebige Kugelfunktionen, so ist

$$(30) \quad \int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_n Y_m \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = 0 \quad \text{für } m \neq n.$$

Y_n und Y_m sind also „orthogonal“.

ϑ und φ sind auffaßbar als Polarkoordinaten. $\sin \vartheta d\vartheta d\varphi = d\sigma$ bedeutet dann ein an der Oberfläche der Kugel vom Radius $r=1$ gelegenes Flächenelement.

2. Wird $m = n$ und bedeutet γ den Winkel eines Radius nach (ϑ, φ) gegen den festen Radius (ϑ', φ') , so ist

$$(31) \quad \int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_n P_n(\cos \gamma) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \frac{4\pi}{2n+1} Y_n(\vartheta', \varphi').$$

Dabei ist

$$\cos \gamma = \cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\varphi - \varphi').$$

f) Entwicklungen nach Kugelfunktionen.

1. Entwicklung nach allgemeinen Kugelfunktionen:

$$(32) \quad f(\vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\vartheta, \varphi).$$

Die Glieder Y_n der Entwicklung sind bestimmt durch

$$Y_n(\vartheta, \varphi) = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\vartheta', \varphi') P_n(\cos \gamma) \sin \vartheta' d\vartheta' d\varphi'.$$

2. Entwicklung nach den symmetrischen Kugelfunktionen:

$$(33) \quad f(\vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_{n0} P_n(\cos \vartheta) + \sum_{m=1}^n (a_{nm} \cos m\varphi + b_{nm} \sin m\varphi) P_n^m(\cos \vartheta)]$$

Die Koeffizienten sind bestimmt durch:

$$a_{n0} = \frac{2n+1}{n} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\vartheta, \varphi) P_n(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$$

$$a_{nm} = \frac{2n+1}{2\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\vartheta, \varphi) P_n^m(\cos \vartheta) \cos m\varphi \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$$

$$b_{nm} = \frac{2n+1}{2\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\vartheta, \varphi) P_n^m(\cos \vartheta) \sin m\varphi \sin \vartheta d\vartheta d\varphi.$$

3. Entwicklung nach einfachen Kugelfunktionen:

$$(34) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x),$$

die Koeffizienten c_n sind bestimmt durch

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(\mu) P_n(\mu) d\mu.$$

e:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\vartheta+r^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n P_n(\cos\vartheta), \quad (r < 1)$$

$$\frac{m!}{(2m+1)!} \left((2m+1)P_m(x) + (2m-3)\frac{(2m+1)}{2}P_{m-2}(x) \right. \\ \left. - 7\frac{(2m+1)(2m-1)}{2 \cdot 4}P_{m-4}(x) + \dots \right) \\ - 2k \cdot P_{m-2k}(x),$$

$$-2k = (2m-4k+1) \frac{m(m-1)\dots(2k+2)}{(2k+3)\dots(2m-2k+1)}.$$

6. Zylinderfunktionen¹⁾.

a) Definitionen.

Zylinderfunktionen sind Funktionen einer Variablen x und eines Parameters p , der beliebige (reelle) Werte annehmen kann.

x ist die Funktion nur bei ganzzähligem p definiert. Zylinderfunktionen sind gewisse Lösungen der Differential-

$$\frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right)y = 0 \quad (\text{Besselsche Differentialgleichung}).$$

meine Lösung heiße:

$$y = Z_p(x)^2.$$

Die Funktion $u = Z_p(r) \cdot e^{i p \varphi}$ genügt der Differentialgleichung, wo φ das Azimut um die z -Achse, r den Abstand von der z -Achse bedeutet, und u nicht von x abhängt (Zylindersymmetrie). Die Funktionen erster Art $I_p(x)$ (Besselsche Funktionen) sind definiert:

speziell von $Z_p(x)$ aus der Bedingung, daß

$$I_p(0) \text{ endlich ist für } p \geq 0$$

$$I_p(x) = 0 \text{ ist für } x = \infty.$$

$$I_0(x) = 1 \text{ für } x = 0.$$

für weitere Formeln, Tabellen und Literaturangaben vgl. Jahrbuch der Mathematik S. 90f.

Die inhomogene Gleichung: $\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{a}{x} \frac{dy}{dx} + \left(b^2 - \frac{c^2}{x^2}\right)y = 0$ hat die

Lösungen $y = J_\alpha(bx)$, wo $\alpha = \frac{1-a}{2}$ und $p^2 = \alpha^2 + c^2$.

2. bei ganzzahligem p als Grenzfall der zugeordneten Kugelfunktionen P_n^m (vgl. S. 61) für $n = \infty$, nämlich

$$(2) \quad I_p(x) = (-1)^p \lim_{n \rightarrow \infty} P_n^p \left(\cos \frac{x}{n} \right).$$

3. bei ganzzahligem p durch das Integral

$$(3) \quad I_p(x) = \frac{(-i)^p}{\pi} \int_0^\pi e^{ix \cos \varphi} \cos p \varphi \, d\varphi.$$

Daraus folgt für gerades p

$$(3a) \quad I_{2n} = \frac{(-1)^n}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \cos \varphi) \cos 2n \varphi \, d\varphi = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin \varphi) \cos 2n \varphi \, d\varphi,$$

für ungerades p

$$(3b) \quad \begin{aligned} I_{2n+1} &= \frac{(-1)^n}{\pi} \int_0^\pi \sin(x \cos \varphi) \cos(2n+1) \varphi \, d\varphi \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x \sin \varphi) \sin(2n+1) \varphi \, d\varphi. \end{aligned}$$

4. $I_p(x) \cdot 2i^p = c_p$ ist der Koeffizient der Fourierentwicklung

$$(4) \quad e^{ix \cos \omega} = \frac{1}{2} c_0 + c_1 \cos \omega + c_2 \cos 2\omega + \dots + c_p \cos p\omega + \dots$$

und wird demnach dargestellt durch die Potenzreihe

$$(4a) \quad \begin{aligned} 5. \quad I_p(x) &= \frac{x^p}{p! 2^p} \left(1 - \frac{x^2}{2(2p+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(2p+2)(2p+4)} - \dots \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{p+2k}}{2^{p+2k} \cdot k! (p+k)!}. \end{aligned}$$

Für nicht ganzes p ist in dieser Summenformel $\Pi(p+k)$ statt $(p+k)!$ einzusetzen (vgl. S. 70).

b) Zylinderfunktionen zweiter Art.

Als Zylinderfunktionen zweiter Art werden verschiedene Funktionen gebraucht.

$$(5) \quad 1. \quad N_p(x) = -\frac{2}{\pi} K_p(x) = \frac{I_p(x) \cos p\pi - I_{-p}(x)}{\sin p\pi},$$

$$(6) \quad 2. \quad H_p^{(1)}(x) = I_p(x) + i N_p(x) = \frac{i}{\sin p\pi} (e^{-p\pi i} I_p(x) - I_{-p}(x)),$$

$$(7) \quad 3. \quad H_p^{(2)}(x) = I_p(x) - i N_p(x) = \frac{-i}{\sin p\pi} (e^{p\pi i} I_p(x) - I_{-p}(x)).$$

$H_p^{(1)}(x)$ und $H_p^{(2)}(x)$ heißen „Hankelsche Zylinderfunktionen“.

Ihr Aufbau

$$H^{(1)} = I + iN, \quad H^{(2)} = I - iN \text{ ist analog } e^{is} = \cos x + i \sin x, \\ e^{-is} = \cos x - i \sin x.$$

Diese Definitionen versagen für ganzes p . Durch Grenzübergang findet man hier die Entwicklung:

$$(8) \quad 4. N_p(x) = \frac{2}{\pi} \left\{ I_p(x) \left(\ln \frac{x}{2} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p} \right) + \ln \gamma \right) - \right. \\ \left. - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{p+2k}{k(p+k)} I_{p+2k} - \frac{1}{2} p! \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{p-k} \left(\frac{2}{x} \right)^{p-k} \frac{I_k}{k!} \right\}$$

$\ln \gamma = 0,57722 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right)$ heißt *Eulersche Konstante*.

c) Allgemeine Beziehungen.

Für alle bisher genannten Zylinderfunktionen Z_p gelten folgende Beziehungen:

1. Rekursionsformel:

$$(9) \quad Z_{p-1} + Z_{p+1} = \frac{2p}{x} Z_p.$$

Hieraus folgt speziell:

$$Z_2 = \frac{2}{x} Z_1 - Z_0,$$

$$Z_3 = -\frac{4}{x} Z_0 - \left(1 - \frac{8}{x^2} \right) Z_1 \text{ usw.}$$

$$Z_{-1} = -Z_1,$$

$$Z_{-2} = \frac{2}{x} Z_1 - Z_0 \text{ usw.}$$

und allgemein für ganzzahliges p :

$$(9a) \quad Z_{-p} = (-1)^p Z_p.$$

Aus Z_0 und Z_1 sind daher alle Z_p für ganzzahliges p ableitbar.

2. Differentialformeln:

$$(10) \quad \frac{dZ_p}{dx} = -\frac{p}{x} Z_p + Z_{p-1}.$$

Hieraus folgt speziell:

$$\frac{dZ_0(x)}{dx} = -Z_1(x),$$

$$\frac{dZ_1(x)}{dx} = -\frac{1}{x} Z_1 + Z_0 \text{ usw.}$$

8. Integralformeln:

$$(11a) \quad \int x^{p+1} Z_p(x) dx = x^{p+1} Z_{p+1}(x).$$

Speziell ist:

$$\int x Z_0(x) dx = x Z_1 \text{ usw.}$$

$$(11b) \quad \int x^{-p+1} Z_p(x) dx = -x^{-p+1} Z_{p-1}(x).$$

Orthogonalität der Besselschen Funktionen:

$$\int_0^1 I_0(\alpha_m x) I_0(\alpha_n x) x dx = 0 \quad \text{wenn} \quad I_0(\alpha_m) = I_0(\alpha_n) = 0$$

$$\int_0^1 [I_0(\alpha_m x)]^2 x dx = \frac{[I_1(\alpha_m)]^2}{2} \quad ,, \quad I_0(\alpha_m) = 0.$$

d) Die allgemeine Lösung der Besselschen Differentialgleichung.

Für die allgemeine Lösung der Besselschen Differentialgleichung sind zwei voneinander unabhängige Zylinderfunktionen zu verwenden.

Hierfür eignen sich:

a) für reelles x

1. $I_p(x)$ und $I_{-p}(x)$ außer für ganzzahliges p , da $I_p(x)$ und $I_{-p}(x)$ in diesem Falle numerisch gleich werden.

2. $I_p(x)$ und $N_p(x)$.

b) für rein imaginäres x

$I_p(ix)$ und $H_p^{(1)}(ix)$.

e) Spezielle Formen von Zylinderfunktionen,

wenn der Parameter ein Bruch mit dem Nenner 2 ist.

$$1. \quad I_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$$

$$I_{\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right)$$

$$I_{\frac{5}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\left(\frac{3}{x^2} - 1 \right) \sin x - \frac{3}{x} \cos x \right)$$

usw.

$$2. \quad I_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

$$I_{-\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(-\sin x - \frac{\cos x}{x} \right)$$

$$I_{-\frac{5}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{3}{x} \sin x + \left(\frac{3}{x^2} - 1 \right) \cos x \right)$$

usw.

$$\begin{aligned}
 3. \quad H_{\frac{1}{2}}^{(1)}(x) &= -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} i e^{ix} & H_{\frac{1}{2}}^{(2)}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} i e^{-ix} \\
 H_{-\frac{1}{2}}^{(1)}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{ix} & H_{-\frac{1}{2}}^{(2)}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-ix} \\
 4. \quad N_{\frac{1}{2}}(x) &= -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x & N_{-\frac{1}{2}}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x.
 \end{aligned}$$

f) Grenzwerte für kleines x .

1. Reelles Argument

$\lim x = 0$:

$$\begin{aligned}
 a) \quad I_0(x) &= 1, \quad I_p(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^p \frac{1}{\Gamma(p)}, \text{ wenn } p > 0 \\
 I_1(x) &= \frac{x}{2}, \quad I_p(x) \begin{cases} = 0, & \text{wenn } p < 0 \text{ und ganzzahlig} \\ = \infty, & \text{wenn } p < 0 \text{ und nicht ganzzahlig} \end{cases} \\
 I_2(x) &= \frac{x^2}{8}, \quad I_p(0) \\
 b) \quad N_0(x) &= -\frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\gamma x}, \text{ wo } \gamma = 1,7811 \dots \text{ ist} \\
 N_1(x) &= -\frac{2}{\pi x} \\
 c) \quad H_0^{(1)}(x) &= 1 - \frac{2i}{\pi} \ln \frac{2}{\gamma x}
 \end{aligned}$$

2. Imaginäres Argument.

$$\begin{aligned}
 a) \quad I_0(ix) &= 1 \\
 I_1(ix) &= \frac{ix}{2} \\
 b) \quad N_0(ix) &= -\frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\gamma x} + i \\
 N_1(ix) &= -\frac{x}{2} + i \frac{2}{\pi x} \\
 c) \quad H_0^{(1)}(ix) &= -\frac{2i}{\pi} \ln \frac{2}{\gamma x} \\
 H_1^{(1)}(ix) &= -\frac{2}{\pi x}
 \end{aligned}$$

g) Negativer Parameter.

$$(12) \quad I_{-p} = I_p \cdot \cos p\pi - N_p \cdot \sin p\pi.$$

Es wird also:

$$I_{-p} = (-1)^p I_p, \quad N_{-p} = (-1)^p N_p \text{ für ganzzahliges } p.$$

$$I_{-p} = -N_p \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right) = N_p \cdot (-1)^{n+1} = N_p \cdot (-1)^{p+\frac{1}{2}} \text{ für } p = n + \frac{1}{2}.$$

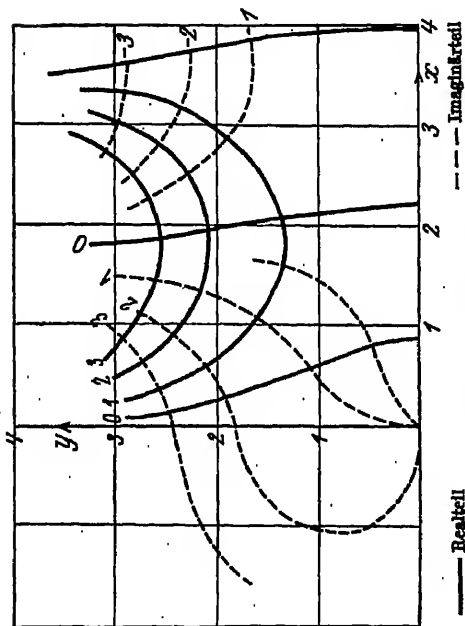
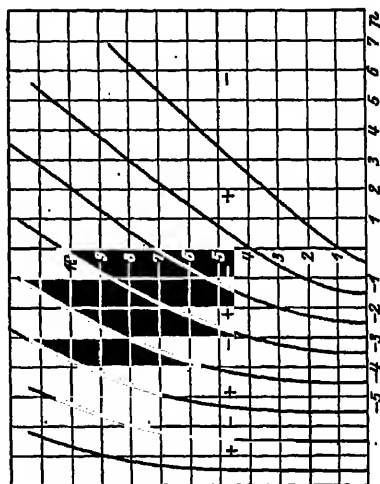
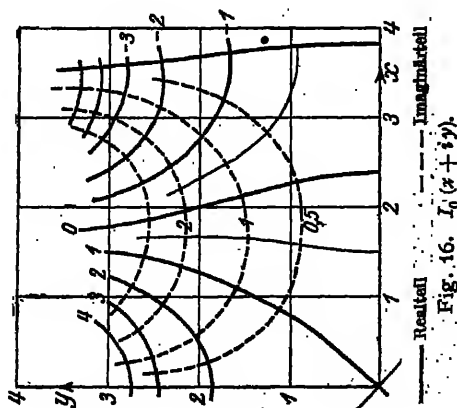
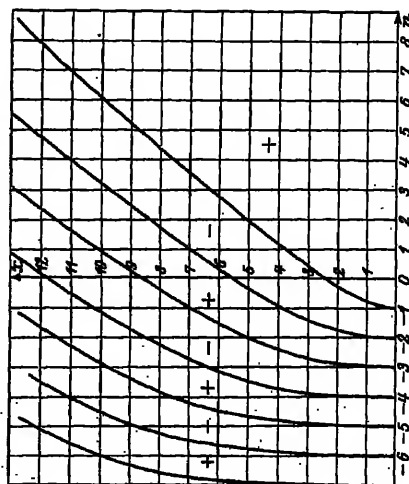
Negativ reelles Argument.

Ist p ganzzahlig, so wird

$$(13) \quad I_p(-x) = (-1)^p I_p(x).$$

Ist $p = n + \frac{1}{2}$, so wird

$$(14) \quad I_p(-x) = \pm i I_p(x) \text{ (mit unbestimmtem Vorzeichen).}$$

Für beliebiges p wird $I_p(-x)$ vieldeutig wegen des Faktors x^p .Fig. 17. $N_0(x + iy)$.Fig. 19. $N_p(x) = 0$.Fig. 16. $I_0(x + iy)$.Fig. 18. Kurven: $I_p(x) = 0$.

h) Asymptotische Werte für große Werte des Arguments x und im Vergleich zu x kleinem p^1 .

$\lim x = \infty$.

$$(15a) \quad H_p^{(1)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot e^{ix} i^{-(p+\frac{1}{2})}$$

$$(15b) \quad H_p^{(2)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot e^{-ix} i^{+(p+\frac{1}{2})},$$

daraus wegen $2I_p = H_p^{(1)} + H_p^{(2)}$:

$$\begin{aligned} I_p(x) &= \pm \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \text{ für gerades } p \\ &= \pm \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \text{ für ungerades } p. \end{aligned}$$

Analogie zu den Exponentialfunktionen.

$$1. \quad I_p(x) \text{ entspricht } \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

Es ist periodisch für großes x mit der Periode 2π .

$$2. \quad H_p^{(1)}(ix) \text{ entspricht } e^{-x}.$$

Es ist monoton abfallend, asymptotisch auf Null.

$$3. \quad H_p^{(2)}(ix) \text{ entspricht } e^x.$$

Es ist monoton nach ∞ ansteigend.

i) Entwicklung nach Zylinderfunktionen.

In Analogie zu den *Fourierschen* Reihen gilt (unter Voraussetzung der Konvergenz):

$$(16) \quad f(x) = \sum_a A_a I_0(ax) + A_0, \quad \text{wo } A_0 = \int_0^1 f(t) t dt \text{ ist,}$$

$$\text{und } A_a = \frac{2}{[I_1(a)]^2} \int_0^1 f(t) I_0(at) t dt.$$

Hierbei ist die Summe zu erstrecken über die sämtlichen Wurzeln $x = a$ der Gleichung $I_0(x) = 0$.

Entsprechend den *Fourierschen* Integralen gilt ferner die Beziehung:

$$(17) \quad f(x) = \int_0^\infty I_0(sx) s ds \int_0^\infty f(t) I_0(st) t dt.$$

¹⁾ Wegen genauerer Abschätzung vgl. z. B. *Jahnke u. Emde*, Funktionen-tafeln, S. 102.

²⁾ Vgl. *Anm.* S. 58.

7. Gammafunktion¹⁾.

Das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n = n!$ heißt n Fakultät. Der Ausdruck

$$\Pi(x) = \lim_{n=\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \cdot n^x}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}$$

ist für ganzzahliges positives x gleich $x!$. Dieser Ausdruck, der für jedes komplexe, von einer negativen ganzen Zahl verschiedene x konvergiert, liefert daher eine Funktion, welche die nur für ganze positive x definierte Funktion $x!$ zwischen diesen Werten interpoliert und für negative x (sowie für das komplexe Gebiet) extrapoliert. [Es können noch beliebig viele andere Funktionen angegeben werden, die das gleiche leisten, z. B.

$$\Pi(x) \cdot \cos(2\pi n x)].$$

Die Gammafunktion $\Gamma(x)$ kann folgendermaßen definiert werden:

$$(1) \quad \Gamma(x) = \Pi(x-1) = \lim_{n=\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \cdot n^{x-1}}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)},$$

$$(2) \quad \Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad (\text{Eulersches Integral}).$$

• Beide Definitionen laufen auf dasselbe hinaus.

Es gilt die Integraldarstellung

$$(3) \quad \ln \Gamma(x) = \int_0^{\infty} \left[(x-1)e^{-t} - \frac{e^{-t} - e^{-ts}}{1 - e^{-t}} \right] \frac{dt}{t}.$$

Allgemein gilt

$$(4) \quad \Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x), \quad \Pi(x+1) = (x+1) \cdot \Pi(x)$$

$$(5) \quad \Gamma(x) \cdot \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} = \Pi(-x) \cdot \Pi(x-1).$$

Wenn daher $\Gamma(x)$ in einem Intervall zwischen zwei ganzen Zahlen bzw. in einem vertikalen Parallelstreifen der komplexen Ebene (z. B. zwischen 1 und 2) bekannt ist, so ist $\Gamma(x)$ für beliebige Werte leicht berechenbar.

Spezielle Werte:

$$\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1 = \Pi(0) = \Pi(1),$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} = \Pi\left(-\frac{1}{2}\right),$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} = \Pi\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi} = \Pi\left(-\frac{3}{2}\right),$$

$$\frac{1}{\Gamma(0)} = 0,$$

¹⁾ Tabellen usw. vgl. *Jahnke u. Emde*, Funktionentafeln, S. 26.

$\frac{1}{\Gamma(-n)} = 0$, wo n eine positive ganze Zahl bedeutet,

$$\Gamma(x+n) = (x+n-1)(x+n-2) \dots x \cdot \Gamma(x).$$

Das Residuum von $\Gamma(x)$ bei $x = -n$ ist: $\frac{(-1)^n}{n!}$.

Für sehr große positive x ist

$$\ln \Gamma(x) \sim (x + \frac{1}{2}) \ln x - x + \ln \sqrt{2\pi} \quad (\text{vgl. S. 12}).$$

8. Elliptische Integrale und Funktionen¹⁾.

$V = \int F(x, \sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4}) dx$ heißt ein elliptisches Integral, falls F eine rationale Funktion ist, und $\alpha + \beta x + \dots + \varepsilon x^4 = 0$ nur einfache Wurzeln hat. V läßt sich durch die Substitution $x = \frac{p+qt}{1+t}$ auf die Form bringen

$$(1) \quad V = \int \Phi(t, \sqrt{\pm(t^2 + \lambda)(t^2 + \mu)}) dt = \int \Phi(t, T) dt,$$

wo Φ eine rationale Funktion, λ, μ reelle Parameter sind. $\Phi(t, T)$ kann man auf die Form bringen $\frac{M+Nt}{M'+N'T}$, wo M usw. ganze Funktionen von t^2 und T sind, bzw. durch Erweitern mit $M' - N'T$ in die Form $P + Qt$, wo P und Q rationale Funktionen von t^2 und T sind, also $V = \int P dt + \int Q \cdot t dt$. Das Integral $\int Q t dt$ kann durch die Substitution $u = t^2$ auf elementare Funktionen zurückgeführt werden. $\int P dt$ andererseits auf die Form

$$(2) \quad \int \Psi(t^2) dt + \int \frac{\Phi(t^2) dt}{T},$$

worin Ψ und Φ rationale Funktionen sind. Ersteres führt auf elementare Funktionen, letzteres führt auf ein elliptisches Integral.

T kann die folgenden Formen haben:

$$1. \quad T = \sqrt{+(t^2 - \lambda^2)(t^2 - \mu^2)}$$

$$2. \quad T = \sqrt{-(t^2 - \lambda^2)(t^2 - \mu^2)}$$

$$3. \quad T = \sqrt{+(t^2 + \lambda^2)(t^2 - \mu^2)}$$

$$4. \quad T = \sqrt{-(t^2 + \lambda^2)(t^2 - \mu^2)}$$

$$5. \quad T = \sqrt{+(t^2 + \lambda^2)(t^2 + \mu^2)}.$$

Alle können auf dieselbe Form gebracht werden durch Änderung der Variablen. Man setze

¹⁾ Wegen Tabellen usw. vgl. *Jahnke u. Emde, Funktionentafeln*, S. 46.

$$1. \quad \frac{\lambda^2}{\mu^2} = k^2 < 1. \quad \text{Für } t^2 < \lambda^2 \quad \text{setze } t = \lambda x$$

$$\text{für } t^2 > \lambda^2 \quad \text{setze } t = \frac{\mu}{x}$$

$$2. \quad \frac{\mu^2 - \lambda^2}{\mu^2} = k^2$$

$$3. \quad t^2 > \mu^2 \quad \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \mu^2} = k^2$$

$$4. \quad t^2 < \mu^2 \quad \frac{\mu^2}{\lambda^2 + \mu^2} = k^2$$

$$5. \quad \lambda^2 < \mu^2 \quad \frac{\mu^2 - \lambda^2}{\lambda^2} = k^2.$$

Dann wird

$$(3) \quad \int \frac{dt}{T} = A \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}},$$

wo A in den 5. Fällen einen verschiedenen, von λ , μ , k abhängigen konstanten Wert erhält. k heißt *Modul*.

$\Phi(t^2)$ kann zerlegt werden in ganze Funktionen und Partialbrüche:

$$(4) \quad \Phi(t^2) = \sum_n a_n t^{2n} + \sum_n \frac{b_n}{(1+c_n t^2)^n}.$$

Nun gilt die Rekursionsformel:

$$(5) \quad (2n-1)k^2 \int \frac{t^{2n} dt}{T} - (2n-2)(1+k^2) \int \frac{t^{2n-2} dt}{T} \\ + (2n-3) \int \frac{t^{2n-4} dt}{T} = t^{2n-2} \cdot \sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}.$$

Daher ist es möglich, alle $\int \frac{t^{2n} dt}{T}$ auf $\int \frac{t^2 dt}{T}$ und $\int \frac{dt}{T}$ zurückzuführen.

Die Glieder der Form $\int \frac{1}{(1+c_n t^2)^n} \frac{dt}{T}$ lassen sich in ähnlicher Weise auf $\int \frac{dt}{T}$ und $\int \frac{t^2 dt}{(1+c_n t^2)T}$ zurückführen. Die Integrale $\int \frac{dt}{T}$, $\int \frac{t^2 dt}{T}$ und $\int \frac{t^2 dt}{(1+c_n t^2)T}$ heißen *Normalintegrale 1., 2. und 3. Gattung*.

Elliptische Funktionen.

Die elliptischen Funktionen sind die Umkehrfunktionen der elliptischen Integrale. Sie sind doppelperiodische Funktionen des komplexen Arguments u mit den zwei komplexen Perioden ω_1 und ω_2 , so daß

$$(6) \quad f(u) = f(u + m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2) \quad (m_1, m_2 \text{ ganze Zahlen})$$

wird. Sie sind im Endlichen überall bis auf Pole regulär. Das Verhältnis

$$\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

stets nicht reell. Die komplexe u -Ebene ist dann in Parallelogramme eingeteilt, deren Eckpunkte ein Gitter $u_0 + m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2$ bilden. In entsprechenden Punkten verschiedener Periodenparallelogramme hat dann $f(u)$ den gleichen Wert. Ist α der Winkel zwischen Seiten a und b des Parallelogramms, so wird $\frac{\omega_1}{\omega_2} = e^{i\alpha} \cdot \frac{a}{b}$, also

$$\text{Größe } q = e^{\frac{i\pi\omega_1}{\omega_2}}$$

$$q = e^{i\pi\omega} = e^{-\frac{a}{b}\pi\sin\alpha} \left[\cos\left(\frac{a}{b}\pi\cos\alpha\right) + i\sin\left(\frac{a}{b}\pi\cos\alpha\right) \right].$$

Jede doppelperiodische Funktion $f(u, \omega_1, \omega_2)$ kann als eine meromorphe Funktion der beiden elliptischen Funktionen $\wp(u, \omega_1, \omega_2)$ und $\wp'(u, \omega_1, \omega_2)$ dargestellt werden; dabei ist

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum'_{m_1, m_2} \left[\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right]$$

$$\wp'(u) = \frac{d\wp(u)}{du} = -2 \sum'_{m_1, m_2} \frac{1}{(u-w)^3}$$

$w = m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2$ bedeutet und die Summen über alle ganzen Werte für m_1 und m_2 mit Ausschluß von $m_1 = m_2 = 0$ zu verstehen sind.

Das führt zu folgender Entwicklung:

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \frac{1}{20} g_2 u^2 + \frac{1}{28} g_3 u^4 + \frac{1}{1200} g_2^3 u^6 + \frac{3}{6160} g_2 g_3 u^8 + \dots$$

$$g_2 = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^4 \left[\frac{1}{12} + 20 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 q^{2n}}{1 - q^{2n}} \right]$$

$$g_3 = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^6 \left[\frac{1}{216} - \frac{7}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 q^{2n}}{1 - q^{2n}} \right].$$

hat in den Punkten $u = m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2$ Pole 2. Ordnung, $\wp'(u)$ vier Pole 3. Ordnung.

Weiter werden folgende (nicht mehr doppelperiodische) Funktionen benutzt:

$$\zeta(u) = \int_0^u \wp(u) du, \quad \sigma(u) = u \cdot e^{\int_0^u \left(\zeta(u) - \frac{1}{u} \right) du}.$$

ist dabei

$$\zeta(u + \omega_1) = \zeta(u) + \eta_1, \quad \zeta(u + \omega_2) = \zeta(u) + \eta_2.$$

sind η_1 und η_2 von u unabhängige Konstanten, und zwar

$$\eta_2 = \frac{\pi^2}{3\omega_2} \left[1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 q^{2n}}{1 - q^{2n}} \right],$$

während η_1 daraus durch Vertauschung von ω_2 und ω_1 hervorgeht.

$$(12) \quad \sigma(u + \omega_1) = -e^{\eta_1(u + \frac{\omega_1}{2})} \cdot \sigma(u), \quad \sigma(u + \omega_2) = -e^{\eta_2(u + \frac{\omega_2}{2})} \cdot \sigma(u).$$

Liouvillesche Sätze:

1. Es gibt keine nicht konstante elliptische Funktion, die im Periodenparallelogramm überall endlich ist.
2. Die Summe der Residuen im Periodenparallelogramm ist Null.
3. Die elliptische Funktion nimmt jeden Wert im Periodenparallelogramm gleich oft an wie den Wert ∞ .

Jede n -wertige elliptische Funktion mit den n einfachen Polen $\alpha_1 \dots \alpha_n$ läßt sich darstellen durch eine Reihe

$$(13) \quad f(u) = A + \sum_{k=1}^n a_k \cdot \zeta(u - \alpha_k),$$

wo a_k die zu den Polen α_k gehörigen Residuen sind.

Jede n -wertige elliptische Funktion mit den Polen $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ der Ordnungen $\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n$ läßt sich darstellen durch:

$$(14) \quad f(u) = A + \sum_{k=1}^n [a_k \zeta(u - \alpha_k) + a_k' \wp(u - \alpha_k) + a_k'' \wp'(u - \alpha_k) + \dots + a_k^{(\nu_k-1)} \wp^{(\nu_k-2)}(u - \alpha_k)].$$

Ist

$$u = \int_{\infty}^z \frac{dz}{2w},$$

wo

$$w = \frac{1}{2} \sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3} = \sqrt{(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3)}$$

mit

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0,$$

so wird umgekehrt

$$z = \wp(u) = \wp(u + m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2),$$

$$\frac{dz}{du} = \wp'(u) = 2 \sqrt{(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3)} = 2w.$$

Dabei ist

$$\wp(0) = \wp(\omega_1) = \wp(\omega_2) = \infty,$$

$$\wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = e_1, \quad \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right) = e_2, \quad \wp\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) = e_3.$$

z ist eine doppelperiodische Funktion von u . u ist eine unendlich vielwertige Funktion von z , die auf der zu ω gehörigen, bei $e_1 e_2 e_3$ und ∞ verzweigten *Riemannschen* Fläche selbst unverzweigt ist.

Setzt man

$$(15) \quad u = \int_0^{\varphi} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}} = F(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}},$$

wo $x = \sin \varphi$, so nennt man φ die „Amplitude“ von u . Das führt auf folgende Funktionen:

$$(16a) \quad x = \sin \operatorname{amp}(u) = \operatorname{sn}(u) = u - (1 + k^2) \frac{u^3}{3!} + \dots$$

$$(16b) \quad \sqrt{1 - x^2} = \cos \operatorname{amp}(u) = \operatorname{cn}(u) \\ = 1 - \frac{u^2}{2!} + (1 + 4k^2) \frac{u^4}{4!} - \dots$$

$$(16c) \quad \sqrt{1 - k^2 x^2} = \Delta \operatorname{amp}(u) = \operatorname{dn}(u) \\ = 1 - k^2 \frac{u^2}{2!} + (4k^2 + k^4) \frac{u^4}{4!} - \dots$$

sn , cn , dn sind die *Jacobischen* elliptischen Funktionen, und zwar hat

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(u) & \text{ die Perioden } \omega_1 = 4K, \quad \omega_2 = 2iK' \\ \operatorname{cn}(u) & \text{ die Perioden } \omega_1 = 4K, \quad \omega_2 = 2K + 2iK' \\ \operatorname{dn}(u) & \text{ die Perioden } \omega_1 = 2K, \quad \omega_2 = 4iK', \end{aligned}$$

wobei

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi}} \quad \text{und} \quad k'^2 = 1 - k^2.$$

Zur Berechnung von sn , cn , dn dienen außer obigen Reihen auch die Formeln

$$(17) \quad \operatorname{sn}(u) = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_0(v)}, \quad \operatorname{cn}(u) = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_0(v)}, \quad \operatorname{dn}(u) = \sqrt{k'} \frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_0(v)},$$

wobei $v = \frac{u}{2K}$, $q = e^{-\pi \frac{K'}{K}}$ und die vier *Thetafunktionen* $\vartheta_0, \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ durch Reihen darstellbar sind:

$$(18) \quad \begin{cases} \vartheta_0(v, q) = 1 - 2q \cos 2\pi v + 2q^4 \cos 4\pi v - 2q^9 \cos 6\pi v + \dots \\ \vartheta_1(v, q) = 2q^{\frac{1}{4}} \sin \pi v - 2q^{\frac{9}{4}} \sin 3\pi v + 2q^{\frac{25}{4}} \sin 5\pi v - \dots \\ \vartheta_2(v, q) = 2q^{\frac{1}{4}} \cos \pi v + 2q^{\frac{9}{4}} \cos 3\pi v + 2q^{\frac{25}{4}} \cos 5\pi v + \dots \\ \vartheta_3(v, q) = 1 + 2q \cos 2\pi v + 2q^4 \cos 4\pi v + 2q^9 \cos 6\pi v + \dots \end{cases}$$

Literatur.

Knopp: Funktionentheorie (Sammlung Göschen). — **Fricke:** Funktionentheoretische Vorlesungen (Leipzig: Teubner). — **Hurwitz-Courant:** Funktionentheorie (Berlin: Julius Springer). — **Burchardt:** Funkt.-theor. Vorlesungen, Berlin (VWV). — Lehrbücher der Differentialrechnung, s. S. 24. — Speziell zu den Kugel- und Zylinderfunktionen: **Courant-Hilbert** (Berlin: Julius Springer). — **Riemann-Weber:** Part. Diff.-Gl. d. math. Physik (Braunschweig: Vieweg). — **Fricke:** (s. o.). — Zu den elliptischen Funktionen: **Hurwitz-Courant** (s. o.). — **Fricke** (s. o.). — **Burchardt** (s. o.), Bd. II.

Fünfter Abschnitt.

Transformationen.

A. Allgemeines über Transformationen.

1. Bedeutung einer Transformation.

Eine Transformation ordnet einem Wertesystem $x_1 x_2 x_3 \dots x_n$ ein anderes $x'_1 x'_2 \dots x'_n$ zu durch ein System von Gleichungen der Form

$$x'_1 = f_1(x_1 x_2 \dots x_n); \quad x'_2 = f_2(x_1 x_2 \dots x_n), \dots, \quad x'_n = f_n(x_1 x_2 \dots x_n).$$

Die f_i sollen im folgenden stetige Funktionen mit von Null verschiedener Funktional-Determinante (vgl. S. 80) sein.

Eine solche Transformation bedeutet geometrisch

1. eine Koordinatenänderung. $x_1 x_2 \dots x_n$ sind die ursprünglichen Koordinaten eines Punktes einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit (bzw. homogene Koordinaten einer $n-1$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit). $x'_1 x'_2 \dots x'_n$ sind die neuen Koordinaten desselben Punktes.
2. eine Verschiebung des Punktes $x_1 x_2 \dots x_n$ in die neue Lage $x'_1 x'_2 \dots x'_n$ im selben Koordinatensystem.
3. eine Abbildung der Mannigfaltigkeit $x_1 x_2 \dots x_n$ auf eine andere $x'_1 x'_2 \dots x'_n$.

1. Koordinatenänderung. Wir gehen aus von einem *Cartesischen* Koordinatensystem.

a) Sind die $f_i(x_1 \dots x_n)$ beliebige Funktionen, so hat man ein neues im allgemeinen krummliniges Koordinatensystem (Spezialfälle siehe B. Koordinatensysteme).

b) Sind die f_i lineare Funktionen der x_n , so erhält man

a) für gewöhnliche Koordinaten ein geradliniges (i. a. schiefwinkliges) Koordinatensystem, bestehend aus parallelen äquidistanten Geraden (affines Koordinatensystem),

b) für homogene Koordinaten ein geradliniges Koordinatensystem, bestehend aus $(n-1)$ Strahlen- (Ebenen-) bündeln (projektives Koordinatensystem).

2. Verschiebung.

- a) Sind die f_i beliebige stetige Funktionen, so erhält man eine endliche Verzerrung, bei welcher ursprünglich gerade Linien zu Kurven werden.
- b) Sind die f_i lineare Funktionen, so erhält man eine homogene Verzerrung. Gerade und Ebenen bleiben solche. Sind sie ursprünglich parallel, so bleiben sie es. Kegelschnitte und Flächen 2. Grades bleiben solche unter Änderung ihrer Achsenrichtungen und Verhältnisse. Konjugierte Durchmesser bleiben konjugiert.

3. Abbildung.

- a) Durch beliebige Funktionen f_i wird die Mannigfaltigkeit $x_1 x_2 \dots x_n$ auf eine andere $x'_1 \dots x'_n$ abgebildet. Hierbei ist i. a. die Abbildung nicht eindeutig, d. h. einem Punkt $x_1 \dots x_n$ entsprechen mehrere Punkte $x'_1 \dots x'_n$, bzw. mehrere Punkte $x_1 \dots x_n$ ergeben denselben Punkt $x'_1 \dots x'_n$.

Für $n = 2$ ist die Abbildung konform, wenn

$$\frac{\partial x'_1}{\partial x_1} = \frac{\partial x'_2}{\partial x_2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial x'_1}{\partial x_2} = - \frac{\partial x'_2}{\partial x_1}.$$

- b) Durch lineare Funktionen f_i wird die ganze Ebene $x_1 \dots$ auf die ganze Ebene $x'_1 \dots$ eindeutig abgebildet. Sind die x gewöhnliche Koordinaten, so entsprechen den ∞ fernen Punkten wieder ∞ ferne, nicht aber für homogene Koordinaten.

2. Spezielle Transformationen.

a) Lineare Transformation.

Die lineare homogene Transformation, zunächst für drei Koordinaten, ist dargestellt durch das Gleichungssystem

$$(1) \quad \begin{aligned} x'_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \\ x'_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \\ x'_3 &= a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3. \end{aligned}$$

Ihre geometrische Bedeutung ist

- a) eine kollineare Transformation (projektive Transformation) in der Ebene, indem man die x_i und x'_i als homogene Koordinaten in der Ebene auffaßt:

$$x = \frac{x_1}{x_3}; \quad y = \frac{x_2}{x_3}; \quad x' = \frac{x'_1}{x'_3}; \quad y' = \frac{x'_2}{x'_3}.$$

Gerade und Kegelschnitte bleiben solche.

Parallele Liniensysteme werden zu Strahlenbüscheln.

Harmonische Strahlenbüschel bleiben harmonisch.

Der ∞ ferne Punkt wird im allgemeinen zu einem endlichen.

Die Transformation ist äquivalent der folgenden:

$$x' = \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}; \quad y' = \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}.$$

Ebenso ergibt sich eine kollineare Transformation im Raum mit 4 homogenen Variablen.

- b) eine affine Transformation im Raum, wenn die x_i, x'_i gewöhnliche inhomogene Parallelkoordinaten sind, d. h. Gerade und Ebenen, Kegelschnitte und Flächen 2. Grades bleiben solche. Parallele Gerade und Ebenen bleiben parallel. Richtungen und Winkel werden im allgemeinen geändert. Der Nullpunkt bleibt Nullpunkt. Der ∞ ferne Punkt bleibt im Unendlichen.

Die lineare Transformation für n Variable ist gegeben durch die Matrix a ihrer Koeffizienten:

$$(2) \quad a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Die Transformation heißt singular, wenn ihre Determinante verschwindet.

Zwei nacheinander ausgeübte Transformationen sind äquivalent einer einzigen, deren Matrix c gleich dem Produkt (ba) der beiden Matrices a und b ist. Dieses wird gebildet wie das Produkt zweier Determinanten (s. S. 8, Formel (7), 1). Die Faktoren sind im allgemeinen nicht vertauschbar:

$$(3) \quad c = (ba) \neq (ab).$$

Für drei nacheinander ausgeübte Transformationen gilt

$$(4) \quad d = c(ba) = (cb)a,$$

d. h. sie ist äquivalent einer Transformation a und einer auf sie folgenden $(b \cdot c)$. Die Matrix der inversen Transformation, d. h. einer solchen, die die erste (a) rückgängig macht, heißt a^{-1} .

Die Transformation a^{-1} lautet:

$$(5) \quad x_1 = \frac{A_{11}}{a} x'_1 + \frac{A_{21}}{a} x'_2 + \frac{A_{31}}{a} x'_3 + \dots$$

usw., wo a die Determinante der a_{ik} und A_{ik} die Unterdeterminante zu a_{ik} bedeutet.

Die Transformation (aa^{-1}) , deren Matrix lautet:

$$(6) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

heißt „identische Transformation“. Man schreibt $aa^{-1} = 1$.

b) Orthogonale Transformationen.

Ein durch die Transformation $x' = f_1(x, y, z)$, $y' = f_2$, $z' = f_3$ gebildetes neues Koordinatensystem ist orthogonal, d. h. die Flächen $x' = a$, $y' = b$, $z' = c$ stehen aufeinander senkrecht, wenn

$$(7) \quad \begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial z} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_3}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial f_3}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial z} \cdot \frac{\partial f_3}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_3}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \cdot \frac{\partial f_3}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial z} \cdot \frac{\partial f_3}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

Eine lineare Transformation heißt *orthogonal*, wenn

$$(8) \quad \begin{aligned} a_{1i}^2 + a_{2i}^2 + a_{3i}^2 + \dots &= 1 \\ a_{1i} a_{1j} + a_{2i} a_{2j} + \dots &= 0 \end{aligned} \quad \text{für } i \neq j.$$

Dann ist

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots = x_1'^2 + x_2'^2 + \dots$$

Geometrisch bedeutet die Transformation eine Drehung oder Spiegelung ohne Verzerrung, wenn die x_i gewöhnliche rechtwinklige Koordinaten bedeuten. Eine orthogonale Transformation hat $\frac{n(n-1)}{2}$ unabhängige Koeffizienten. Alle Kreise (Kugeln) um den Nullpunkt werden in sich übergeführt.

Durch lineare Transformation kann eine quadratische Form $\varphi = \sum_{i,j} c_{ij} x_i x_j$ auf ∞ viele Weisen auf die Form $\varphi' = \sum_i c_i x_i'^2$ gebracht werden. Hierbei ist, falls die c_i reell sind, in allen Fällen die Zahl der positiven c_i dieselbe („Trägheitsgesetz“). Sind alle c_i positiv, so heißt die Form *definit*. Sie ist dann für alle möglichen reellen x_i positiv.

Geometrisch bedeutet dies, daß ein projektives Koordinatensystem gefunden werden kann, in dem die Koordinatenachsen zugleich konjugierte Durchmesser eines gegebenen Kegelschnittes sind. Die $\sqrt{\frac{1}{c_i}}$ sind dann die Koordinaten der Achsenabschnitte des Koordinatensystems.

Durch orthogonale lineare Transformationen kann $\varphi = \sum c_{ij} x_i x_j$ auf $n!$ Weisen in die Form $\varphi' = \sum c_i x_i'^2$ gebracht werden.

c) Infinitesimale Transformationen.

$$(9) \quad \begin{aligned} x' &= x + \varepsilon f_1(x, y, z), \\ y' &= y + \varepsilon f_2(x, y, z), \\ z' &= z + \varepsilon f_3(x, y, z), \end{aligned}$$

wo ε eine kleine Größe bedeutet, deren Potenzen $\varepsilon^2, \varepsilon^3, \dots$ vernachlässigt werden können, heißt eine *infinitesimale Transformation*.

Zwei infinitesimale Transformationen nacheinander ausgeübt ergeben, wenn

$$\begin{aligned}x'' &= x' + \varepsilon f_1'(x', y', z') \\y'' &= y' + \varepsilon f_2'(x', y', z') \\z'' &= z' + \varepsilon f_3'(x', y', z')\end{aligned}$$

gesetzt wird,

$$x'' = x + \varepsilon [f_1(x, y, z) + f_1'(x, y, z)] + \varepsilon^2(\dots),$$

also

$$\begin{aligned}(10) \quad x'' &= x + \varepsilon (f_1 + f_1') \\y'' &= y + \varepsilon (f_2 + f_2') \\z'' &= z + \varepsilon (f_3 + f_3').\end{aligned}$$

Sie sind also in der Reihenfolge vertauschbar.

Eine infinitesimale *lineare* Transformation ist:

$$\begin{aligned}(11) \quad x' &= \varepsilon \alpha + (1 + \varepsilon \alpha_1)x + \varepsilon \alpha_2 y + \varepsilon \alpha_3 z \\y' &= \varepsilon \beta + \varepsilon \beta_1 x + (1 + \varepsilon \beta_2)y + \varepsilon \beta_3 z \\z' &= \varepsilon \gamma + \varepsilon \gamma_1 x + \varepsilon \gamma_2 y + (1 + \varepsilon \gamma_3)z.\end{aligned}$$

Sie ist zerlegbar in drei Teiltransformationen:

1. $x' = x + \varepsilon \alpha; \quad y' = y + \varepsilon \beta; \quad z' = z + \varepsilon \gamma$, d. h. *Verschiebung*.

$$\left. \begin{aligned}2. \quad x' &= x + \varepsilon \alpha_1 x + \frac{\varepsilon}{2}(\alpha_2 + \beta_1)y + \frac{\varepsilon}{2}(\alpha_3 + \gamma_1)z \\y' &= y + \frac{\varepsilon}{2}(\alpha_2 + \beta_1)x + \varepsilon \beta_2 y + \frac{\varepsilon}{2}(\beta_3 + \gamma_2)z \\z' &= z + \frac{\varepsilon}{2}(\gamma_1 + \alpha_3)x + \frac{\varepsilon}{2}(\beta_3 + \gamma_2)y + \varepsilon \gamma_3 z\end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{d. h.} \\ \text{Dehnung.} \end{array}$$

$$\left. \begin{aligned}3. \quad x' &= x + \frac{\varepsilon}{2}(\alpha_2 - \beta_1)y + \frac{\varepsilon}{2}(\alpha_3 - \gamma_1)z \\y' &= y + \frac{\varepsilon}{2}(\beta_1 - \alpha_2)x + \frac{\varepsilon}{2}(\beta_3 - \gamma_2)z \\z' &= z + \frac{\varepsilon}{2}(\gamma_1 - \alpha_3)x + \frac{\varepsilon}{2}(\gamma_2 - \beta_3)y\end{aligned} \right\} \text{d. h. Drehung.}$$

3. Transformations-Determinante.

Bei der Transformation von Integralen spielt die zur Transformation $x_i = f_i(x_1' \dots x_n')$ gehörende *Funktional-Determinante* D eine Rolle.

$$(12) \quad D = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1'} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n'} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1'} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n'} \end{vmatrix} = \frac{\partial(f_1 f_2 \dots f_n)}{\partial(x_1' x_2' \dots x_n')}.$$

1. Es ist

$$(13) \quad \begin{aligned} & \int \int \dots \int F(x_1 x_2 \dots x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \\ &= \int \int \dots \int F'(x'_1 x'_2 \dots x'_n) \cdot D \cdot dx'_1 dx'_2 \dots dx'_n, \end{aligned}$$

d. h. die Volumen- bzw. Flächen-Elemente im alten und neuen Koordinatensystem verhalten sich wie 1: D .

2. Die Volumen- bzw. Flächen-Elemente werden bei der Verschiebung um den Faktor D vergrößert.

3. Die Volumen- bzw. Flächen-Elemente werden um den Faktor D vergrößert abgebildet.

Die Determinante der infinitesimalen Transformation von S. 79 wird:

$$(14) \quad \frac{\partial(x' y' z')}{\partial(x y z)} = 1 + \varepsilon \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \right).$$

4. Invarianten.

Ist eine Transformation $x_i = f_i(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ gegeben, so gibt es gewisse Funktionen, für welche gilt:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$$

d. h., der Wert dieser Funktion bleibt ungeändert, wenn man in ihr an Stelle der ursprünglichen Variablen die neuen einsetzt. Solche Funktionen heißen Invarianten der Transformation. Die Kenntnis der Invarianten ist wesentlich zur Beurteilung des Charakters einer Transformation.

Deutet man die Transformation geometrisch als Koordinatenänderung, so bezeichnet man die Invarianten auch als Skalare. Beispiele hierfür sind der Abstand zweier Punkte, Inhalt einer Fläche u. dgl. Der invariante Abstand zweier unendlich benachbarter Punkte: $ds = \sqrt{\sum_{i,k} g_{ik} dx_i dx_k} = \sqrt{\sum_{i,k} g'_{ik} dx'_i dx'_k}$, das „Linienelement“, spielt eine besonders wichtige Rolle. Kennt man die Abhängigkeit der g_{ik} von den x_i , so sind dadurch auch alle (bei einer Koordinatentransformation invarianten) Maßverhältnisse innerhalb der durch die x_i beschriebenen Mannigfaltigkeit (Fläche, Raum, mehrdimensionales Gebiet) festgelegt. Die g_{ik} heißen deshalb Komponenten des Maßtensors (vgl. S. 172 u. 240).

Als Invariante wird auch häufig eine Funktion bezeichnet, welche bei der Transformation sich nur um einen Faktor ändert, der von den x_i unabhängig ist, also nur von den Parametern der Transformation abhängt.

Eine Gleichung oder Gleichungssystem, welches gültig bleibt beim Ersetzen aller x_i durch die neuen x'_i , heißt kovariant.

B. Koordinaten-Systeme und Koordinaten-Transformationen.

a) Ebene Koordinaten-Systeme.

In der Ebene benutzt man u. a.:

1. Das **Cartesische Koordinaten-System** zweier sich rechtwinklig kreuzender äquidistanter Gradenscharen. Die infinitesimale Entfernung ds zweier Punkte ist gegeben durch¹⁾

$$(1) \quad ds^2 = dx^2 + dy^2, \text{ also } g_{11} = 1, \quad g_{22} = 1, \quad g_{12} = 0, \\ g^{11} = 1, \quad g^{22} = 1, \quad g^{12} = 0, \quad |g| = 1,$$

falls man den allgemeinen Ausdruck $ds^2 = \sum_i \sum_k dx^i \cdot dx^k \cdot g_{ik}$ zugrunde legt.

Der *Laplacesche* Operator Δ (vgl. S. 156 und 175) lautet hier:

$$(2) \quad \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}.$$

2. **Affines, schiefwinkliges (geradliniges, äquidistantes) Koordinatensystem.** Der Abstand ds zweier infinitesimal benachbarter Punkte ist hier gegeben durch

$$(3) \quad ds^2 = a^2 dx_1^2 + b^2 dx_2^2 + 2c^2 dx_1 dx_2,$$

wo $c^2 = ab \cos \varphi$ und φ der Winkel zwischen der x_1 - und x_2 -Achse ist. Also

$$g_{11} = a^2, \quad g_{22} = b^2, \quad g_{12} = ab \cos \varphi, \\ g^{11} = \frac{1}{a^2 \sin^2 \varphi}, \quad g^{22} = \frac{1}{b^2 \sin^2 \varphi}, \quad g^{12} = \frac{1 \cdot \cos \varphi}{ab \sin^2 \varphi}, \\ |g| = a^2 b^2 - c^4 = a^2 b^2 \sin^2 \varphi.$$

Hier wird

$$(4) \quad \Delta V = \frac{1}{\sin^2 \varphi} \left(\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} + \frac{1}{ab} \cos \varphi \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} \right).$$

Die Transformation auf *Cartesische* Koordinaten x, y heißt:

$$(5) \quad x = x_1 \alpha_1 + x_2 \beta_1 + \gamma_1 = x_1 a \cdot \cos \alpha + x_2 b \cos(\alpha + \varphi) + \gamma_1, \\ y = x_1 \alpha_2 + x_2 \beta_2 + \gamma_2 = x_1 a \cdot \sin \alpha + x_2 b \cdot \sin(\alpha + \varphi) + \gamma_2,$$

also

$$a^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2, \\ b^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2, \\ c^2 = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2, \quad \cos \varphi = - \frac{(\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2)}{\sqrt{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)(\beta_1^2 + \beta_2^2)}}$$

¹⁾ Wegen der Bedeutung der Symbole ds, g_{11}, g_{12} usw., sowie der Dreiindizes-Symbole vgl. S. 172ff.

Aufgelöst nach x_1, x_2 ergibt sich:

$$(5') \quad \begin{aligned} x_1 &= + \frac{x \cdot \beta_2}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}} - \frac{y \cdot \beta_1}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}} + \frac{\begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}}, \\ x_2 &= - \frac{x \cdot \alpha_2}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}} + \frac{y \cdot \alpha_1}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}} - \frac{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}}, \end{aligned}$$

oder anders geschrieben:

$$(5'') \quad \begin{aligned} x_1 &= - \frac{x \cdot \sin(\alpha + \varphi)}{a \sin \varphi} + \frac{y \cdot \cos(\alpha + \varphi)}{a \sin \varphi} + \frac{\gamma_1 \sin(\alpha + \varphi) + \gamma_2 \cos(\alpha + \varphi)}{a \sin \varphi}, \\ x_2 &= \frac{x \cdot \sin \alpha}{b \sin \varphi} - \frac{y \cdot \cos \alpha}{b \sin \varphi} + \frac{\gamma_1 \cdot \sin \alpha + \gamma_2 \cos \alpha}{b \sin \varphi}. \end{aligned}$$

3. Polarkoordinaten r, φ .

$$(6) \quad \begin{aligned} x &= r \cos \varphi, & y &= r \sin \varphi, \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2}, & \varphi &= \arctg \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

Es wird hier

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2,$$

also

$$\begin{aligned} g_{11} &= 1, & g_{22} &= r^2, & g_{12} &= 0, \\ g^{11} &= 1, & g^{22} &= \frac{1}{r^2}, & g^{12} &= 0, & |g| &= r^2, \end{aligned}$$

$$(7) \quad \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}.$$

Von den Dreiindizes-Symbolen (s. S. 173), bestehen nur

$$\left\{ \begin{smallmatrix} 22 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} = -r; \quad \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} = \left\{ \begin{smallmatrix} 21 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} = +\frac{1}{r}.$$

Die Gleichung der Geraden ist $r \sin(\varphi - \alpha) = p$. Ihr Abstand vom Nullpunkt ist p , ihre Richtung ist durch den Winkel α gegen die Achse $\varphi = 0$ gegeben.

Zwei Gerade sind parallel, wenn $\alpha_1 = \alpha_2$. Ihr Abstand ist $|p_1 - p_2|$.

„ „ „ senkrecht, „ $\alpha_1 = \pi - \alpha_2$.

Die Entfernung zweier Punkte $(\varphi_1, r_1), (\varphi_2, r_2)$ ist

$$c = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

b) Räumliche Koordinaten-Systeme.

1. Das Cartesische Koordinaten-System.

$$(1) \quad \begin{aligned} g_{ik} &= 1 \quad \text{für} \quad i = k \\ &= 0 \quad \text{„} \quad i \neq k. \end{aligned}$$

Im übrigen vgl. S. 82.

Drehung eines *Cartesischen* Koordinatensystems um den endlichen Winkel δ um eine Achse, welche die Richtungen α, β, γ gegen X, Y, Z besitzt:

$$\begin{aligned}x' &= x(1 - \sin^2 \alpha (1 - \cos \delta)) + y(\cos \beta \cos \alpha (1 - \cos \delta) + \cos \gamma \sin \delta) \\&\quad + z(\cos \gamma \cos \alpha (1 - \cos \delta) - \cos \beta \sin \delta); \\y' &= x(\cos \alpha \cos \beta (1 - \cos \delta) - \cos \gamma \sin \delta) + y(1 - \sin^2 \beta (1 - \cos \delta)) \\&\quad + z(\cos \gamma \cos \beta (1 - \cos \delta) + \cos \alpha \sin \delta); \\z' &= x(\cos \alpha \cos \gamma (1 - \cos \delta) + \cos \beta \sin \delta) + y(\cos \beta \cos \gamma (1 - \cos \delta)) \\&\quad - \cos \alpha \sin \delta) + z(1 - \sin^2 \gamma (1 - \cos \delta)) \\&\quad \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.\end{aligned}$$

Setzt man

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \alpha_1, & \cos \beta &= \alpha_2, & \cos \gamma &= \alpha_3 \\x &= x_1, & y &= x_2, & z &= x_3 \\x'_i &= \sum_k a_{ik} x_k,\end{aligned}$$

so ist also

$$a_{ik} = \delta_{ik} \cos \delta + \alpha_i \alpha_k (1 - \cos \delta) + \alpha_i \sin \delta$$

wo z. B.

$$\begin{aligned}\alpha_{12} &= \alpha_2 = -\alpha_{21}; & \alpha_{11} &= \alpha_{22} = \alpha_{33} = 0 \\ \delta_{11} &= \delta_{22} = \delta_{33} = 1; & \delta_{12} &= \delta_{13} = \dots = 0.\end{aligned}$$

Invariant bleibt hierbei

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 &= r^2 = \sum_i \sum_k x_i x_k \delta_{ik} \\(3) \quad x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma &= \sum_i x_i \alpha_i = p.\end{aligned}$$

p ist die Projektion von r auf die Achse (α, β, γ) .

Für kleine δ wird

$$\begin{aligned}x' &= x + y\delta \cdot \cos \gamma - z\delta \cdot \cos \beta \\(4) \quad y' &= -x\delta \cos \gamma + y + z\delta \cdot \cos \alpha \\z' &= x\delta \cos \beta - y\delta \cdot \cos \alpha + z \\&\quad a_{ik} = \delta_{ik} + \alpha_i \alpha_k \cdot \delta.\end{aligned}$$

Zwischen den a_{ik} bestehen die „Orthogonalitätsbedingungen“:

$$(5) \quad \begin{cases} \sum_i a_{ik}^2 = 1; & \sum_k a_{ik}^2 = 1 \\ \sum_i a_{ik} a_{il} = 0; & \sum_k a_{ik} a_{lk} = 0 \end{cases}$$

a_{ik} ist der Kosinus der Winkel zwischen der x_i und x'_k -Achsen ($|a_{ik}| \leq 1$). Die orthogonale Transformation $x'_i = \sum_k a_{ik} x_k$ ist also festgelegt durch

9 Größen a_{ik} , zwischen denen 6 unabhängige Beziehungen bestehen. Sie ist damit auch schon festgelegt durch die 3 Größen a_{11} , a_{22} , a_{33} . Aus diesen findet man den Drehwinkel δ durch

$$(6) \quad \cos \delta = \frac{a_{11} + a_{22} + a_{33} - 1}{2}$$

und die Richtungswinkel α , β , γ der Drehachse durch

$$(7) \quad \begin{aligned} \cos \alpha &= \sqrt{\frac{a_{11} - \cos \delta}{1 - \cos \delta}} \\ \cos \beta &= \sqrt{\frac{a_{22} - \cos \delta}{1 - \cos \delta}} \\ \cos \gamma &= \sqrt{\frac{a_{33} - \cos \delta}{1 - \cos \delta}} \end{aligned}$$

2. Räumlich schiefwinklige Koordinatensysteme (affine K.-S.).

$$(8) \quad \begin{aligned} x &= \alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \gamma_1 x_3 + \delta_1, \\ y &= \alpha_2 x_1 + \beta_2 x_2 + \gamma_2 x_3 + \delta_2, \\ z &= \alpha_3 x_1 + \beta_3 x_2 + \gamma_3 x_3 + \delta_3. \end{aligned}$$

Schreibt man

$$\begin{aligned} a^2 &= \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2, & ab \cos \gamma &= \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3, \\ b^2 &= \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2, & ac \cos \beta &= \alpha_1 \gamma_1 + \alpha_2 \gamma_2 + \alpha_3 \gamma_3, \\ c^2 &= \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2, & bc \cos \alpha &= \beta_1 \gamma_1 + \beta_2 \gamma_2 + \beta_3 \gamma_3, \end{aligned}$$

so wird

$$(9) \quad \begin{aligned} ds^2 &= a^2 dx_1^2 + b^2 dx_2^2 + c^2 dx_3^2 + 2ab \cos \gamma dx_1 dx_2 \\ &\quad + 2ac \cos \beta dx_1 dx_3 + 2bc \cos \alpha dx_2 dx_3, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} g_{11} &= a^2, & g_{12} &= ab \cos \gamma, \\ g_{22} &= b^2, & g_{13} &= ac \cos \beta, \\ g_{33} &= c^2, & g_{23} &= bc \cos \alpha, \end{aligned} \quad |g| = a^2 b^2 c^2 (1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma)$$

$$= a^2 b^2 c^2 \cdot C = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}^2,$$

$$g^{11} = \frac{1}{a^2} \frac{\sin^2 \alpha}{C}, \quad g^{12} = \frac{1}{ab} \frac{(\cos \gamma - \cos \beta \cos \alpha)}{C},$$

$$g^{22} = \frac{1}{b^2} \frac{\sin^2 \beta}{C}, \quad g^{13} = \frac{1}{ac} \frac{(\cos \beta - \cos \alpha \cos \gamma)}{C},$$

$$g^{33} = \frac{1}{c^2} \frac{\sin^2 \gamma}{C}, \quad g^{23} = \frac{1}{bc} \frac{(\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma)}{C},$$

$$(10) \quad dV = \frac{1}{C} \cdot \left(\frac{\sin^2 \alpha}{a^2} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{(\cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta)}{ab} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} + \dots \right).$$

3. Sphärische Polarkoordinaten.

$$x = r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$y = r \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi, \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x},$$

$$z = r \cdot \cos \vartheta, \quad \vartheta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \arctg \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \right).$$

Das Linienelement ds wird

$$(11) \quad ds^2 = dr^2 + r^2 \cdot \sin^2 \vartheta d\varphi^2 + r^2 \cdot d\vartheta^2,$$

also

$$g_{11} = 1; \quad g_{22} = r^2 \sin^2 \vartheta; \quad g_{33} = r^2;$$

$$g^{11} = 1; \quad g^{22} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta}; \quad g^{33} = \frac{1}{r^2}; \quad |g| = r^4 \sin^2 \vartheta.$$

$$(12) \quad \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{r^2} \operatorname{ctg} \vartheta \cdot \frac{\partial V}{\partial \vartheta}.$$

Dreiindizes-Symbole:

$$\left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} = -r \sin^2 \vartheta, \quad \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 3 \end{matrix} \right\} = -\sin \vartheta \cos \vartheta,$$

$$\left\{ \begin{matrix} 33 \\ 1 \end{matrix} \right\} = -r,$$

$$\left\{ \begin{matrix} 21 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{r}, \quad \left\{ \begin{matrix} 31 \\ 3 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 13 \\ 3 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{r},$$

$$\left\{ \begin{matrix} 32 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 23 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \operatorname{ctg} \vartheta.$$

4. Zylindrische Polarkoordinaten.

$$x = \varrho \cos \varphi, \quad \varrho = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$y = \varrho \sin \varphi, \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x},$$

$$z = z, \quad z = z.$$

$$(13) \quad ds^2 = d\varrho^2 + \varrho^2 d\varphi^2 + dz^2.$$

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = \varrho^2, \quad g_{33} = 1,$$

$$g^{11} = 1, \quad g^{22} = \frac{1}{\varrho^2}, \quad g^{33} = 1, \quad |g| = \varrho^2.$$

$$(14) \quad \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial V}{\partial \varrho} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}.$$

Dreiindizes-Symbole:

$$\left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} = -\varrho,$$

$$\left\{ \begin{matrix} 21 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{\varrho}.$$

5. Elliptische Koordinaten.

Durch die Gleichung:

$$(15) \quad \frac{x^2}{\lambda^2 - a^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} = 1$$

ist eine Fläche 2. Grades mit den Hauptachsen $A = \sqrt{\lambda^2 - a^2}$, ... in Richtung der x , y , z -Achse definiert. a , b , c , λ sind reelle Parameter.

Ohne die Allgemeinheit wesentlich zu beschränken, kann der Parameter $a = 0$ gesetzt und die Bestimmung $c \geq b \geq 0$ getroffen werden.

Dann wird:

$$A^2 > B^2 > C^2,$$

$$A^2 = \lambda^2; \quad B^2 = \lambda^2 - b^2; \quad C^2 = \lambda^2 - c^2$$

bzw.

$$\lambda^2 = A^2; \quad b^2 = A^2 - B^2; \quad c^2 = A^2 - C^2.$$

Durch verschiedene Wahl von b , c und λ ergeben sich eine große Zahl verschiedener Flächen: erstens je nachdem, ob λ zwischen 0 und b , oder zwischen b und c , oder zwischen c und ∞ variiert; zweitens je nachdem die Werte b und c sich einander, oder ihren möglichen Grenzwerten 0 bzw. ∞ unbegrenzt annähern. Eine Übersicht über diese Fälle gibt die folgende Tabelle:

	$0 < \lambda < b$	$b < \lambda < c$	$c < \lambda < \infty$
$0 < b < c < \infty$	Zweischaliges Hyperboloid	Einschaliges Hyperboloid	Ellipsoid
$0 < b \sim c < \infty$	Zweischal. Rot.-Hyp. um x -Achse	Ebenenpaar durch x -Achse	Verlängertes Rot.-Ellipsoid um x -Achse
$0 \sim b < c < \infty$	Ebenenpaar durch x -Achse	Einschal. Rot.-Hyp. um x -Achse	Abgeflächtes Rot.-Ellipsoid um x -Achse
$0 \sim b \sim c < \infty$	Elliptischer Kegel um x -Achse	Elliptischer Kegel um x -Achse	Kugel
$0 < b < c \sim \infty$	Hyp. Zylinder $\parallel x$ -Achse	Ellipt. Zylinder $\parallel x$ -Achse	Ebenenpaar $\perp x$ -Achse
$0 < b \sim c \sim \infty$	Ebenenpaar $\parallel x$ -Achse	Hyp. Zylinder $\parallel x$ -Achse	Ellipt. Zylinder $\parallel x$ -Achse
$0 \sim b < c \sim \infty$	Ebenenpaar durch x -Achse	Kreiszylinder $\parallel x$ -Achse	Ebenenpaar $\perp x$ -Achse

Läßt man λ zwischen c und ∞ variieren, so erfüllen die Ellipsoide (bzw. ihre Entartungen) den ganzen Raum dicht; ebenso die bei Variation von λ zwischen b und c gebildeten einschaligen Hyperboloide; ebenso die bei Variation von λ zwischen 0 und b gebildeten zweischaligen Hyperboloide.

Die entstehenden 3 Flächenscharen sind zueinander orthogonal und konfokal.

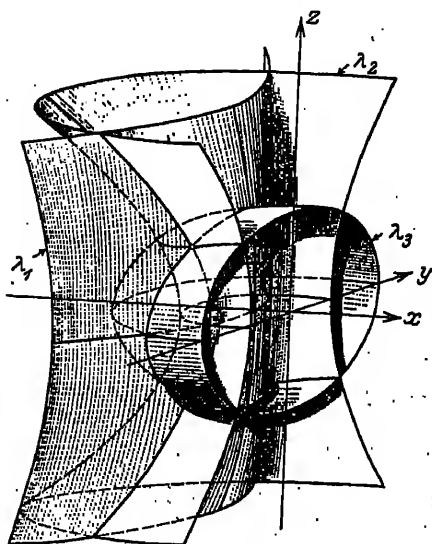


Fig. 20.

Setzt man

$$\lambda_3 > c > \lambda_2 > b > \lambda_1 > a,$$

so ist der Schnittpunkt der 3 Flächen $\lambda = \lambda_1$, $\lambda = \lambda_2$, $\lambda = \lambda_3$ durch diese Werte (8-deutig) bestimmt.

Die 3 Größen λ_1 , λ_2 , λ_3 heißen *elliptische Koordinaten* dieses Punktes. Seien x , y , z seine *Cartesischen* Koordinaten, dann ist

$$x^2 = \frac{(\lambda_1^2 - a^2)(\lambda_2^2 - a^2)(\lambda_3^2 - a^2)}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)},$$

$$y^2 = \frac{(\lambda_1^2 - b^2)(\lambda_2^2 - b^2)(\lambda_3^2 - b^2)}{(c^2 - b^2)(a^2 - b^2)},$$

$$z^2 = \frac{(\lambda_1^2 - c^2)(\lambda_2^2 - c^2)(\lambda_3^2 - c^2)}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)}.$$

$$(16) \quad ds^2 = \frac{\lambda_1^2 d\lambda_1^2 D_2^2 D_3^2}{(\lambda_1^2 - a^2)(b^2 - \lambda_1^2)(c^2 - \lambda_1^2)} +$$

$$+ \frac{\lambda_2^2 d\lambda_2^2 D_1^2 D_3^2}{(\lambda_2^2 - a^2)(\lambda_2^2 - b^2)(c^2 - \lambda_2^2)} +$$

$$+ \frac{\lambda_3^2 d\lambda_3^2 D_1^2 D_2^2}{(\lambda_3^2 - a^2)(\lambda_3^2 - b^2)(\lambda_3^2 - c^2)},$$

wo $D_1^2 = \lambda_2^2 - \lambda_3^2$; $D_2^2 = \lambda_3^2 - \lambda_1^2$; $D_3^2 = \lambda_1^2 - \lambda_2^2$.

An Stelle von λ_1 , λ_2 , λ_3 führt man mit Vorteil folgende Funktionen von ihnen als Koordinaten ein (im Falle $a = 0$):

$$\alpha = \int_0^{\lambda_1} \frac{c \cdot d\lambda_1}{\sqrt{(b^2 - \lambda_1^2)(c^2 - \lambda_1^2)}}, \quad \beta = \int_b^{\lambda_2} \frac{c \cdot d\lambda_2}{\sqrt{(\lambda_2^2 - b^2)(c^2 - \lambda_2^2)}},$$

$$\gamma = \int_c^{\lambda_3} \frac{c \cdot d\lambda_3}{\sqrt{(\lambda_3^2 - b^2)(\lambda_3^2 - c^2)}}.$$

$$(17) \quad [ds^2 = d\alpha^2 \cdot \frac{D_2^2 D_3^2}{c^2} + d\beta^2 \cdot \frac{D_3^2 D_1^2}{c^2} + d\gamma^2 \cdot \frac{D_1^2 D_2^2}{c^2}.$$

Der *Laplacesche* Operator $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \dots$ transformiert sich zu

$$(18) \quad \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2} \cdot \frac{c^2}{D_2^2 D_3^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \beta^2} \cdot \frac{c^2}{D_1^2 D_3^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \gamma^2} \cdot \frac{c^2}{D_1^2 D_2^2}.$$

α, β, γ sind als elliptische Integrale zu berechnen¹⁾. Man setzt²⁾

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= b \sin \vartheta, \\ \lambda_2 &= \sqrt{c^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}, \\ \lambda_3 &= \frac{c}{\cos \psi}, \\ k &= \frac{b}{c}, \\ k' &= \sqrt{1 - k^2},\end{aligned}$$

dann ist

$$\begin{aligned}(19) \quad \alpha &= \int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}} = F(k, \vartheta), \\ \beta &= \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \cos^2 \varphi}} = F(k') - F(k', \varphi), \\ \gamma &= \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \psi}} = F(k) - F(k, \varphi).\end{aligned}$$

Bei Rotationssymmetrie $b = 0$ bzw. $b = c$ benutzt man statt der allgemeinen elliptischen Koordinaten λ besser die spezielleren μ, ν, φ , bzw. σ, τ, φ .

$$\begin{aligned}\text{I.} \quad x &= \alpha \sqrt{\mu^2 + 1} \sqrt{1 - \nu^2} \cos \varphi & \nu^2 &= \alpha^2 (\mu^2 - \nu^2 + 1) \\ y &= \alpha \sqrt{\mu^2 + 1} \sqrt{1 - \nu^2} \sin \varphi \\ z &= \alpha \mu \nu\end{aligned}$$

$\mu = \text{const}$ ist ein abgeplattetes Rotationsellipsoid (Achsen $C = \alpha \mu$ und $A = B = \alpha \sqrt{\mu^2 + 1}$),

$\nu = \text{const}$ ist ein einschaliges Rotationshyperboloid.

$\varphi = \text{const}$ ist eine Ebene durch die z -Achse.

¹⁾ Jede lineare Funktion V von α, β, γ erfüllt die Gleichung $\Delta V = 0$. V wird dann auf einer Fläche zweiten Grades konstant.

²⁾ Spezialfälle (vgl. oben).

1. $b = 0$: $k = 0$, $k' = 1$, $\alpha = \vartheta$,

$$\beta = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sin \varphi} = \ln(0) + \beta', \quad \text{wo } \beta' = \ln \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2},$$

$$\gamma = \varphi.$$

Hier ist β' an Stelle von β brauchbar.

2. $b = c$: $k = 1$, $k' = 0$, $\alpha = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\vartheta}{2} \right)$.

$$\beta = \varphi,$$

$$\gamma = \ln(0) + \gamma', \quad \text{wo } \gamma' = \ln \operatorname{ctg} \frac{\psi}{2}.$$

$$(20) \quad ds^2 = d\mu \cdot \frac{\alpha^2(\mu^2 + \nu^2)}{\mu^2 + 1} + d\nu^2 \frac{\alpha^2(\mu^2 + \nu^2)}{1 - \nu^2} + d\varphi^2 \cdot \alpha^2(\mu^2 + 1)(1 - \nu^2)$$

$$(21) \quad \Delta V = \left\{ \frac{\partial}{\partial \mu} \left((\mu^2 + 1) \frac{\partial V}{\partial \mu} \right) + \frac{\partial}{\partial \nu} \left((1 - \nu^2) \frac{\partial V}{\partial \nu} \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{(\mu^2 + 1)(1 - \nu^2)}{(\mu^2 + \nu^2)} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} \right) \right\} \frac{1}{\alpha^2(\mu^2 + \nu^2)}.$$

$$\text{II.} \quad \begin{aligned} x &= \beta \sqrt{\sigma^2 - 1} \sqrt{1 - \tau^2} \cos \varphi \\ y &= \beta \sqrt{\sigma^2 - 1} \sqrt{1 - \tau^2} \sin \varphi \\ z &= \beta \cdot \sigma \tau. \end{aligned}$$

Hier ist $\sigma = \text{const}$ ein verlängertes Rotationsellipsoid (Achsen $C = \beta \cdot \sigma$ und $A = B = \beta \sqrt{\sigma^2 - 1}$), d. h. man kommt von I auf II durch die Substitution:

$$\alpha = i\beta; \quad \mu = -i\sigma; \quad \nu = \tau; \quad \varphi = \varphi.$$

$\Delta V = 0$ wird erfüllt für I durch die speziellen partikulären Lösungen

$$V = \varphi$$

$$V = \ln \sqrt{\frac{1+\nu}{1-\nu}}$$

$$V = \arctg \mu$$

$$V = \mu \nu$$

$$V = \mu \left(\nu \ln \sqrt{\frac{1+\nu}{1-\nu}} - 1 \right)$$

$$V = \nu (\mu \arctg \mu - 1)$$

und für II durch die mit obiger Substitution gefundenen Ausdrücke. Für $\mu^2 = \nu^2 = \sin^2 \vartheta$, $\alpha = r$ erhält man gewöhnliche Polarkoordinaten r, ϑ, φ .

6. Parabolische Koordinaten: ξ, η, ψ .

Bei Rotationssymmetrie um die z -Achse setzt man

$$x = (\xi \eta) \cdot \cos \psi$$

$$y = (\xi \eta) \cdot \sin \psi$$

$$z = \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2); \quad r = \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2)$$

$$(22) \quad ds^2 = (\xi^2 + \eta^2)(d\xi^2 + d\eta^2) + \xi^2 \eta^2 d\psi^2.$$

$\xi = \text{const}$ ist ein konfokales System von Rotationsparaboloiden um die z -Achse,

$\eta = \text{const}$ ist ein konfokales System von Rotationsparaboloiden um die z -Achse.

Beide Systeme sind zueinander orthogonal.

Der gemeinsame Brennpunkt liegt im Nullpunkt.

$$(23) \Delta V = \left\{ \eta \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial V}{\partial \xi} \right) + \xi \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial V}{\partial \eta} \right) + \left(\frac{\xi^2 + \eta^2}{\xi \eta} \right) \frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} \right\} \frac{1}{\xi \eta (\xi^2 + \eta^2)}.$$

C. Berührungstransformation (Kontakttransformation).

1. Im Zweidimensionalen.

a) Allgemeines. Durch eine Gleichung der Form:

$$(1) \quad W(x, y, X, Y) = 0 \quad (\text{aequatio directrix})$$

wird jedem Punkt der xy -Ebene eine Kurve in der XY -Ebene zugeordnet und umgekehrt, sowie einer Kurve $\varphi(x, y) = 0$ bzw. $x = x(t)$, $y = y(t)$ eine Kurvenschar: $F(X, Y, t) = 0$, deren Enveloppe als Abbild der Kurve $\varphi = 0$ aufgefaßt werden kann.

Der Name „Berührungstransformation“ stammt daher, daß die Abbilder zweier sich berührender Kurven wieder zwei solche sind.

Die Gleichung des Abbildes der Kurve $\varphi = 0$ findet man durch Elimination von t aus den Gleichungen $F = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$, oder durch Elimination von x und y aus $W = 0$, $\varphi = 0$ und

$$\frac{\partial W}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial W}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0.$$

Während sich hierbei die Punkte der xy -Ebene und der XY -Ebene nicht eindeutig entsprechen, tun dies die Punkte einer gegebenen Kurve $\varphi = 0$ und die ihres Abbildes (so daß man letztere mit dem gleichen Parameter t darstellen kann).

Schreibt man $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{dY}{dX} = P$, so findet man aus den drei Gleichungen:

$$W = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial x} + p \cdot \frac{\partial W}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial W}{\partial X} + P \cdot \frac{\partial W}{\partial Y} = 0,$$

die obige Transformation auch in der Form:

$$(2) \quad X = X(x, y, p); \quad Y = Y(x, y, p); \quad P = P(x, y, p),$$

wobei der Ausdruck:

$$(3) \quad \frac{\partial X}{\partial p} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} + p \cdot \frac{\partial Y}{\partial y} \right) - \frac{\partial Y}{\partial p} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + p \cdot \frac{\partial X}{\partial y} \right) = 0$$

sein muß.

b) Ein einfaches Beispiel ist die *Legendresche Transformation*, definiert durch

$$(4) \quad xX - y - Y = 0.$$

Sie liefert die einfachen Beziehungen:

$$(5) \quad p = X, \quad P = x, \quad xp - y = Y, \quad XP - Y = y.$$

Sie findet Anwendung zur Umformung von Differentialgleichungen $f(x, y, p) = 0$ in eine evtl. leichter lösbare Form: $f(P, (XP - Y), X) = 0$, d. h. es wird hier der Differentialquotient zur unabhängigen Variablen X gemacht (vgl. S. 105).

c) Eine für die Mechanik wichtige Berührungs-Transformation ist die *kanonische Transformation*, definiert durch:

$$(6) \quad z - Z = \Phi(q, Q),$$

wo Φ eine beliebige Funktion sei. Setzen wir

$$p = \frac{dz}{dq}; \quad P = \frac{dZ}{dQ},$$

so folgt:

$$(7) \quad p dq - P dQ = d\Phi \quad \text{bzw.} \quad p = \frac{\partial \Phi}{\partial q}, \quad P = -\frac{\partial \Phi}{\partial Q}.$$

Diese Transformation heißt kanonisch, weil sie die sogenannten kanonischen Differentialgleichungen der Mechanik (vgl. S. 189 u. 192):

$$(8) \quad \dot{q} = \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H(q, p)}{\partial p}; \quad \dot{p} = \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q}$$

(wo der Parameter t die Zeit bedeutet und H die *Hamiltonsche* Funktion der Lagenkoordinate q und der Impulskoordinate p ist) in ein analoges System in Q und P überführt.

Zum Beweis bilde man die Variation der durch dt dividierten Gleichung (7)

$$p\dot{q} - P\dot{Q} - \dot{\Phi} = 0,$$

welche lautet

$$p\delta\dot{q} + \dot{q}\delta p - P\delta\dot{Q} - \dot{Q}\delta P - \delta\dot{\Phi} = 0.$$

Wegen

$$p\delta\dot{q} = \frac{d}{dt}(p\delta q) - \dot{p}\delta q$$

und

$$P\delta\dot{Q} = \frac{d}{dt}(P\delta Q) - \dot{P}\delta Q$$

sowie

$$\delta\dot{\Phi} = \frac{d}{dt}\delta\Phi$$

erhält man

$$\dot{q}\delta p - \dot{Q}\delta P + \dot{P}\delta Q - \dot{p}\delta q = 0.$$

Setzt man ferner

$$(9) \quad H(q, p) = K(Q, P) + C,$$

wo C eine beliebige Konstante ist, also

$$\frac{\partial H}{\partial q} \delta q + \frac{\partial H}{\partial p} \delta p - \frac{\partial K}{\partial Q} \delta Q - \frac{\partial K}{\partial P} \delta P = 0$$

und subtrahiert, so folgt wegen (8)

$$(8') \quad \dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P}; \quad \dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q},$$

also wieder ein kanonisches System in den neuen Variablen.

Äquivalent zu den Definitionsgleichungen (7) sind auch folgende:

$$(7') \quad \begin{cases} p dq + Q dP = dX(q, P) \\ q dp + P dQ = d\Psi(p, Q) \\ q dp - Q dP = d\Omega(p, P). \end{cases}$$

Die Transformation wird identisch:

$$p = P, \quad q = Q \quad \text{für} \quad X = q \cdot P \quad \text{oder} \quad \Psi = p \cdot Q.$$

Setzt man die Transformation an in der Form:

$$p = p(P, Q); \quad q = q(P, Q),$$

so folgt aus (7) bzw. (7'), daß

$$(10) \quad \frac{\partial p}{\partial P} = \frac{\partial Q}{\partial q}, \quad \frac{\partial p}{\partial Q} = -\frac{\partial P}{\partial q}, \quad \frac{\partial q}{\partial Q} = \frac{\partial P}{\partial p}, \quad \frac{\partial q}{\partial P} = -\frac{\partial Q}{\partial p},$$

also auch

$$(10') \quad \frac{\partial p}{\partial P} \cdot \frac{\partial q}{\partial Q} - \frac{\partial p}{\partial Q} \cdot \frac{\partial q}{\partial P} = 1,$$

d. h. die Transformationsdeterminante $\frac{\partial(q, p)}{\partial(Q, P)}$ ist = 1, die Abbildung der pq -Ebene auf die PQ -Ebene ist flächentreu.

Eine infinitesimale kanonische Transformation ist gegeben durch

$$(11) \quad Q = q + \lambda \frac{\partial F(q, p)}{\partial p}; \quad P = p - \lambda \cdot \frac{\partial F(q, p)}{\partial q},$$

wo λ eine sehr kleine Konstante sei.

Z. B. ist auch

$$\begin{aligned} Q &= q + \dot{q} dt = q + \frac{\partial H(q, p)}{\partial p} \cdot dt \\ P &= p + \dot{p} dt = p - \frac{\partial H}{\partial q} \cdot dt \end{aligned}$$

eine kanonische Transformation und wegen des Gruppencharakters der Transformation auch

$$(12) \quad q = q_0 + \int_{t_0}^t \dot{q} dt, \quad p = p_0 + \int_{t_0}^t \dot{p} dt$$

eine solche der q_0, p_0 in die q, p .

Es gilt daher

$$(13) \quad p = \frac{\partial S(q_0, q)}{\partial q}; \quad p_0 = -\frac{\partial S(q_0, q)}{\partial q_0}.$$

S heißt in der Mechanik „*Wirkungsfunktion*“ (vgl. S. 193). Dort wird sie in der Regel definiert durch:

$$S = \int_{t_0}^t (p \dot{q} - H) dt = \int_{t_0}^t L dt.$$

$L = p \dot{q} - H$ heißt „*Lagrangische Funktion*“.

In der Tat findet man auch hieraus mit Benutzung von (8):

$$\delta S = p \delta q - p_0 \delta q_0.$$

d) Von besonderem Interesse ist eine kanonische Transformation, welche $K(Q, P)$ nur von P abhängig macht, z. B. $K(P, Q) = \omega P$.

Dann wird

$$(14) \quad \begin{cases} \dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = \omega, & Q = \omega t + \alpha, \\ \dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = 0, & P = \beta, \end{cases}$$

wo ω, α, β Konstanten sind.

Man erhält hier also eine sehr einfache Lösung der transformierten *Hamiltonschen* Gleichung und somit durch Rücktransformation die Lösung der ursprünglichen.

Ein Beispiel hierfür ist das folgende:

Es sei

$$H(q, p) = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2) = K(Q, P) = \omega P;$$

gesucht ist $Q = Q(q, p)$.

Es ist

$$\frac{\partial X}{\partial q} = p = \omega \sqrt{\frac{2P}{\omega} - q^2}, \text{ also } X = \omega \int \sqrt{\frac{2P}{\omega} - q^2} dq + f(P),$$

mithin

$$Q = \frac{\partial X}{\partial P} = \arcsin \left(q \cdot \sqrt{\frac{\omega}{2P}} \right) + f'(P).$$

Setzt man z. B. $f(P) = -\frac{\pi}{2}$, so wird

$$\cos Q = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{p^2}{\omega^2 q^2}}}$$

oder

$$(15) \quad \begin{cases} \operatorname{tg} Q = -\frac{p}{\omega q}; & P = \frac{p^2}{2\omega} + \frac{\omega q^2}{2} \\ \text{bzw.} \\ q = \sqrt{\frac{2P}{\omega}} \cdot \cos Q; & p = -\sqrt{2P\omega} \sin Q. \end{cases}$$

Wenn, wie im vorliegenden Fall, Q eine reine (dimensionslose) Zahl bzw. ein Winkel ist, derart daß q und p als Funktionen von Q mit 2π periodisch sind, heißt Q eine *Winkelvariable*.

e) Eine Verallgemeinerung kann die Theorie noch in der Richtung erfahren, daß die kanonische Transformation von t selbst abhängt, d. h. daß die Formeln $p = p(P, Q, t)$, $q = q(Q, P, t)$ lauten, also t explizite enthalten.

Die einfachste Form ist hierfür:

$$(16) \quad p = P + A t, \quad q = Q + B t,$$

wo A und B beliebige Konstante sind.

Diese Transformation ist kanonisch, wenn man setzt:

$$(16') \quad K(P, Q) = H(p, q) + (A q - B p).$$

Sie liefert mit einer zeitunabhängigen Transformation auf neue Variable P', Q' kombiniert die allgemeinere:

$$(17) \quad p = P(P', Q') + A t, \quad q = Q(P', Q') + B t$$

mit

$$(17') \quad K'(P', Q') = K(P, Q) = H(p, q) + (A q - B p).$$

Man erhält so Transformationen auf bewegte Koordinatensysteme.

Dies kann man benutzen, wenn die Reduktion des vorigen Paragraphen nur bis zu einer Form $K(P, Q) = K_0(P) + K_1(P, Q)$ zu führen ist, wo K_1 klein gegen K_0 sei.

Dann hat man:

$$\dot{Q} = \frac{\partial K_0}{\partial P} + \frac{\partial K_1}{\partial P}; \quad \dot{P} = -\frac{\partial K_1}{\partial Q}; \quad P = \beta_0 - \int_{t_0}^t \frac{\partial K_1}{\partial Q} dt.$$

Wenn nun $\int_{t_0}^t \frac{\partial K_1}{\partial Q} dt$ klein gegen β_0 ist, kann man durch die Transformation:

$$(18) \quad Q = \omega t + \alpha, \quad P = \beta_0 + \beta$$

α und β als neue Variable einführen, die dann selbst als kleine Größen zu behandeln sind.

Das führt nach Obigem auf die Form:

$$K(P, Q) = \Omega(\alpha, \beta) - \omega(\beta_0 + \beta)$$

und

$$\dot{\alpha} = \frac{\partial \Omega}{\partial \beta}; \quad \dot{\beta} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}.$$

Die Größen α und β sind also wieder kanonische Variable mit der *Hamiltonschen* Funktion Ω .

Ω heißt „*Störungsfunktion*“.

Die Methode heißt die der „*Variation der Konstanten*“.

2. Im Mehrdimensionalen.

Hier lautet die aequatio directrix:

$$(19) \quad W(x_1 x_2 \dots x_n X_1 X_2 \dots X_n) = 0.$$

Die *Legendresche* Transformation im Dreidimensionalen ist gegeben durch:

$$(20) \quad xX + yY - z - Z = 0.$$

Hieraus folgt, wenn man z bzw. Z als von x, y bzw. X, Y abhängige Variablen auffaßt:

$$(20') \quad X = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial z}{\partial y}; \quad x = \frac{\partial Z}{\partial X}, \quad y = \frac{\partial Z}{\partial Y} \text{ usw.}$$

$$dz = X dx + Y dy; \quad dZ = x dX + y dY.$$

Die *kanonische Transformation* kann ohne Schwierigkeiten auf mehr Dimensionen verallgemeinert werden; (7) geht über in:

$$(21) \quad \sum_i p_i dq_i - \sum_i P_i dQ_i = d\Phi(q_1 q_2 \dots q_n, Q_1 Q_2 \dots Q_n), \text{ wo } i = 1, 2, \dots, n,$$

also

$$(22) \quad p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial q_i}; \quad P_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial Q_i}.$$

Bis auf die zu setzenden Summenzeichen bleibt alles ungeändert; Gleichung (10) und (10') sind in folgender Weise zu erweitern:

$$(23) \quad \frac{\partial p_i}{\partial P_k} = \frac{\partial Q_k}{\partial q_i}; \quad \frac{\partial p_i}{\partial Q_k} = -\frac{\partial P_k}{\partial q_i}; \quad \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} = \frac{\partial P_k}{\partial p_i}; \quad \frac{\partial q_i}{\partial P_k} = -\frac{\partial Q_k}{\partial p_i}.$$

Daher wird

$$(24) \quad \sum_i \left(\frac{\partial p_i}{\partial P_k} \cdot \frac{\partial q_i}{\partial x} - \frac{\partial p_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial q_i}{\partial P_k} \right) = \sum_i \left(\frac{\partial Q_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial q_i}{\partial x} + \frac{\partial Q_k}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial p_i}{\partial x} \right) = \frac{\partial Q_k}{\partial x}$$

= 1 für $x = Q_k$ und sonst = 0, wenn man für x andere P oder Q außer Q_k einsetzt.

Der Ausdruck

$$(x, y) = \sum_i \left(\frac{\partial q_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial p_i}{\partial y} - \frac{\partial p_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial q_i}{\partial y} \right).$$

heißt „*Lagrangesche Klammer*“.

Es ist also nur

$$(25) \quad (Q_k, P_j) = -(P_j, Q_k) = 1 \quad \text{für } k=j \quad \text{und} \quad = 0 \quad \text{für } k \neq j$$

sowie

$$(Q_k, Q_j) = (P_k, P_j) = 0.$$

Ein Beispiel für eine Transformation im Dreidimensionalen, die (im Sinne der Transformation von S. 94) H auf eine einfachere Form bringt, ist die folgende:

Es sei (Planetenbewegung eines Elektrons um einen Kern):

$$(26) \quad H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} + \frac{p_\vartheta^2}{r^2 \sin^2 \vartheta} \right) - \frac{eE}{r}.$$

Man gelangt durch die Berührungstransformation:

$$X_1 = p_1 r + p_2 \varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\vartheta} d\vartheta \sqrt{p_3^2 - \frac{p_2^2}{\sin^2 \vartheta}}; \quad q_1 = \frac{\partial X_1}{\partial p_1}, \quad p_r = \frac{\partial X_1}{\partial r} \text{ usw.}$$

zu der Form:

$$(27) \quad H = \frac{1}{2m} \left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{q_1^2} \right) - \frac{eE}{q_1}.$$

Eine nochmalige Transformation:

$$X_2 = \int_{q_0}^{q_1} dq_1 \sqrt{-\frac{m^2 e^2 E^2}{P_1^2} + \frac{2m e E}{q_1} - \frac{P_2^2}{q_1^2}} + P_2 q_2 + P_3 q_3;$$

$$p_1 = \frac{\partial X_2}{\partial q_1}; \quad Q_1 = \frac{\partial X_2}{\partial P_1}$$

führt weiter zu:

$$H = K(P, Q) = -\frac{m e^2 E^2}{2 P_1^2}.$$

Die Bedeutung der neuen Variablen ist:

$q_1 = r$ (Radiusvektor),

$q_2 =$ Länge des Planeten vom aufsteigenden Knoten, gemessen in der Bahnebene,

$q_3 =$ Länge des aufsteigenden Knotens, gemessen im Äquator $\vartheta = \frac{\pi}{2}$.

$p_1 = m \dot{r}$,

$p_2 =$ gesamtes Impulsmoment,

$p_3 =$ Impulsmoment in Richtung $\varphi = p_\varphi = m r^2 \dot{\varphi}$

sowie:

$Q_1 =$ mittlere Anomalie,

$Q_2 =$ Länge des Perihels $q = q_0$ vom aufsteigenden Knoten ab,

$Q_3 = q_3$ (s. oben).

$P_1 = \sqrt{m e E a}$, wo a die halbe große Achse der Bahn ist

$P_2 = p_2 = \sqrt{m e E a (1 - e^2)}$, wo e die Exzentrizität der Bahn ist,

$P_3 = p_3 = P_2 \cos i$, wo i die Neigung der Bahn gegen den Äquator ist.

(Die halbe kleine Achse b wird gleich $\frac{P_1 P_2}{m e E}$).

In dieser Form ist Q_1 eine Winkelvariable. (Es ist dies durch die Form des Gliedes mit P_1 in dem Ausdruck für X_1 erreicht worden.) Die übrigen Q und P werden Konstanten.

Literatur:

Böcher: s. S. 12. — Lehrbücher der analytischen Geometrie. — S. a. Enzyklopädie d. math. Wissensch. Bd. III. — *Serrat-Scheffers*: s. S. 24: Bd. III u. a.

Sechster Abschnitt.

Differentialgleichungen.

A. Allgemeines über Differentialgleichungen.

1. Einteilung der Differentialgleichungen.

Eine Gleichung heißt eine Differentialgleichung, wenn sie neben einer oder mehreren unabhängigen oder abhängigen Variablen Differentialquotienten der letzteren nach der bzw. den ersteren enthält.

Man unterscheidet *partielle* und *gewöhnliche* Differentialgleichungen, je nachdem, ob die Gleichung partielle Differentialquotienten enthält oder nicht.

Gewöhnliche Differentialgleichungen enthalten daher nur *eine* unabhängige Variable, partielle dagegen zwei oder mehr.

Man klassifiziert die Differentialgleichungen

1. nach der *Ordnung* n ihres höchsten Differentialquotienten

$$\frac{d^n y}{dx^n} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial^n z}{\partial x^n} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^n z}{\partial x^a \partial y^{n-a}} \quad \text{usw.};$$

2. gelegentlich nach dem *Grade* p der höchsten Potenz der in ihr enthaltenen Differentialquotienten, z. B.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^p,$$

wenn die Gleichung rational in y und seinen Ableitungen ist.

Im besonderen heißt eine Differentialgleichung *linear*, wenn die abhängigen Variablen und ihre Ableitungen nur in der ersten Potenz und nicht miteinander multipliziert auftreten.

Ferner spricht man von *homogenen* Differentialgleichungen. Diese Bezeichnung wird in verschiedenem Sinne gebraucht.

1. Eine Differentialgleichung $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \dots\right) = 0$ wird *homogen* genannt, wenn F eine ganze rationale homogene Funktion von $y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}$ ist. So ist z. B.

$$X_1 \frac{dy}{dx} + X_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + \dots + X_n y = 0$$

eine *homogene lineare* Differentialgleichung. Die $X_1 \dots X_n$ sind beliebige Funktionen von x .

2. Eine Differentialgleichung 1. Ordnung $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ heißt vielfach auch *homogen*, wenn $f(x, y)$ eine Funktion von $\frac{y}{x}$ allein ist, sich also in der Form schreiben läßt:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

In diesem Sinne ist z. B. homogen die Gleichung:

$$M \frac{dy}{dx} = N,$$

in der $M(x, y)$ und $N(x, y)$ homogene Funktionen von x und y desselben Grades sind.

3. Als „*eindimensional*“ wird eine (auch zuweilen „homogen“ genannte) Gattung von Differentialgleichungen folgender Art bezeichnet.

Man betrachtet y als Größe von n Dimensionen, wo n willkürlich ist. x habe die Dimension 1, $\frac{dy}{dx}$ die Dimension $n - 1$, usw.

Haben dann sämtliche Glieder der Gleichung im angegebenen Sinne die gleiche Dimension, so heißt sie „*eindimensional*“. Z. B.

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + A_n y = V,$$

wo $V = f(x)$ oder konstant ist und die A_i Konstanten bedeuten.

2. Lösungen von Differentialgleichungen.

Als *Lösung* einer Differentialgleichung bezeichnet man eine Funktion der unabhängigen Variablen, welche für die abhängige Variable (y) in die Gleichung eingesetzt, diese identisch in den unabhängigen Variablen erfüllt.

Als *Integral* bezeichnet man eine Funktion der unabhängigen und abhängigen Variablen, sowie evtl. willkürlicher Konstanten, welche gleich einer willkürlichen Konstanten gesetzt, bei jedem Wert dieser Konstanten eine Gleichung liefert, die von Lösungen der Differentialgleichung befriedigt wird.

Intermediäres Integral einer Differentialgleichung n -ter Ordnung heißt eine Funktion der unabhängigen und abhängigen Variablen und Konstanten, sowie deren Ableitungen bis höchstens zur $(n - 1)$ -ten Ordnung, welche gleich einer Konstanten gesetzt, eine Differentialgleichung niederer Ordnung liefert, die von Lösungen der ursprünglichen befriedigt wird.

a) Gewöhnliche Differentialgleichungen.

Die *vollständige Lösung* (auch *allgemeine Lösung* oder *Stammgleichung* genannt) einer gewöhnlichen Differentialgleichung n -ter Ordnung enthält n willkürliche Konstanten. Indem man diesen Konstanten spezielle Werte beilegt, erhält man *partikuläre Lösungen*.

Außerdem kann eine Differentialgleichung 1. Ordnung, falls sie nicht linear ist, Lösungen haben, die sich nicht durch spezielle Wahl der Konstanten der vollständigen Lösung zu ergeben brauchen. Diese Lösungen heißen *singuläre Lösungen*.

Existiert eine singuläre Lösung der Differentialgleichung $\varphi(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$, so muß sie gleichzeitig folgende Bedingungen erfüllen:

$$\varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + p \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0,$$

wo $p = \frac{dy}{dx}$ bedeutet.

Geometrische Deutung der Lösung.

Eine partikuläre Lösung einer Differentialgleichung zwischen einer abhängigen y und einer unabhängigen Variablen x repräsentiert eine Kurve in der x, y -Ebene. Die vollständige Lösung einer Differentialgleichung n -ter Ordnung repräsentiert eine von n Parametern abhängige Kurvenschar. Hat für $n = 1$ diese Kurvenschar eine *Envelope*, so ist deren Gleichung eine *singuläre Lösung*.

Die einzelne Kurve (partikuläre Lösung) ist festgelegt durch n Bedingungen, die zur Bestimmung der n Parameter dienen können (Anfangs- oder Randbedingungen).

b) Partielle Differentialgleichungen.

Die *allgemeine Lösung* (Integral) einer partiellen Differentialgleichung n -ter Ordnung mit p unabhängigen Variablen ist eine Lösung, welche n willkürliche *Funktionen* von $p - 1$ Variablen enthält. Diese können gewisse der *unabhängigen* Variablen oder auch Kombinationen von ihnen sein.

Bei Differentialgleichungen 1. Ordnung spielt daneben der Begriff der *vollständigen Lösung* eine Rolle. Als solche bezeichnet man eine Lösung in Form einer Funktion der unabhängigen Variablen, welche p willkürliche *Konstanten* enthält.

Aus einer vollständigen Lösung erhält man die *allgemeine Lösung* der Differentialgleichung erster Ordnung wie folgt: Es sei $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_p, a_1, a_2, \dots, a_p)$ eine vollständige Lösung (wo die a_i willkürliche Konstante seien). Aus dieser p -fachen Schar von Funktionen, greift man eine $(p - 1)$ -fache heraus, indem man z. B. $a_p = \theta(a_1, a_2, \dots, a_{p-1})$ setzt und berechnet hieraus und aus den Gleichungen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial a_p} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial a_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, p - 1),$$

die a_i als Funktionen der x_i und setzt diese Ausdrücke in φ ein. Dann entsteht eine Funktion, welche die Differentialgleichung befriedigt und von der willkürlichen Funktion ϑ von $p - 1$ Variablen abhängt, also die allgemeine Lösung.

Um die *singuläre* Lösung aus der vollständigen zu erhalten, berechne man aus den Gleichungen $\frac{\partial \varphi}{\partial a_i} = 0$ die Größen a_i als Funktionen der x_i und setze in φ ein. Wenn die so entstehende Funktion Lösung der Differentialgleichung ist, so ist sie die *singuläre* Lösung.

Geometrische Deutung der Lösung.

Sind nur zwei unabhängige (x und y) und eine abhängige (z) Variable vorhanden, so können den Lösungen im xyz -Raum geometrische Deutungen gegeben werden.

1. Das *vollständige Integral* repräsentiert ein zweifach unendliches Flächensystem von der Form:

$$\varphi(x, y, z, a, b) = 0$$

mit den beiden willkürlichen Parametern a und b .

2. Dadurch, daß man den einen Parameter zu einer willkürlichen Funktion des anderen macht und aus den drei Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x, y, z, a, b) &= 0 \\ b &= \vartheta(a) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial a} + \frac{\partial \varphi}{\partial b} \vartheta'(a) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

a eliminiert, also aus dem vollständigen Integral das *allgemeine Integral* ableitet, wählt man aus den zwei Flächen *eine* Flächenschar aus und bestimmt deren Enveloppe.

Es bedeutet dann das allgemeine Integral die Enveloppe dieser Flächenschar.

3. Das *singuläre Integral* bedeutet die gemeinsame Enveloppe aller in dem vollständigen Integral enthaltenen Flächen.

B. Gewöhnliche Differentialgleichungen.

1. Differentialgleichungen 1. Ordnung.

Die Differentialgleichung 1. Ordnung hat die allgemeine Form

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Sie ist durch Quadratur lösbar:

a) wenn sie sich schreiben läßt in der Form:

$$f_1(y) \cdot dy = f_2(x) \cdot dx. \quad (\text{Separation der Variablen.})$$

Lösung: $\int f_1(y) dy = \int f_2(x) dx + C^1).$

b) wenn sie linear ist:

$$\frac{dy}{dx} + y \cdot f_1(x) + f_2(x) = 0.$$

Lösung: $y = C e^{-\int f_1(x) dx} - e^{-\int f_1(x) dx} \int f_2(x) e^{\int f_1(x) dx} dx.$

c) wenn sie homogen ist (vgl. S. 99):

1. Die Gleichung habe die Form:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Man setzt $y = vx$, wodurch v und x (statt y und x) als neue Veränderliche eingeführt werden. Dann ist:

$$\frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx},$$

und es wird

$$\ln x + \int \frac{dv}{v - f(v)} = C.$$

2. Die Gleichung habe die Form:

$$F\left(\frac{y}{x}, \frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Man löst auf nach $\frac{dy}{dx}$ und erhält $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$, also Fall 1, oder man löst nach $\frac{y}{x}$ auf und erhält

$$\frac{y}{x} = f\left(\frac{dy}{dx}\right) = f(p),$$

also:

$$\ln x = C + \int \frac{f'(p) dp}{p - f(p)},$$

dann folgt die Lösung durch Elimination von p aus den beiden Gleichungen.

3. Die Gleichung $F\left(\frac{y}{x}, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ läßt sich auch lösen, indem man eine Hilfsvariable u einführt:

$$\frac{y}{x} = f(u), \quad \frac{dy}{dx} = g(u).$$

Es ergibt sich $\ln x = C + \int \frac{f'(u)}{g(u) - f(u)} du.$

¹⁾ Die Integrale sind, wenn keine Grenzen angegeben sind, rein formal zu bilden, z. B. $\int x dx = \frac{x^2}{2}$, d. h. als oberste Grenze ist die Variable selbst zu nehmen, die untere Grenze ist willkürlich.

d) wenn die unabhängige Variable fehlt:

$$\psi\left(y, \frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

1. Ist die Gleichung nach $\frac{dy}{dx}$ auflösbar

$$\frac{dy}{dx} = f(y),$$

so ist:

$$\int \frac{dy}{f(y)} = x + C.$$

2. Ist die Gleichung nach y auflösbar

$$y = f\left(\frac{dy}{dx}\right) = f(p),$$

so ist:

$$x = \int \frac{f'(p) dp}{p} + C.$$

Dann erhält man die Lösung $y(x)$ durch Elimination von p aus den beiden hingeschriebenen Gleichungen.

3. y und $\frac{dy}{dx} = p$ werden durch Hilfsvariable ausgedrückt

$$y = f(u), \quad p = g(u),$$

dann ist:

$$x = C + \int \frac{f'(u)}{g(u)} du.$$

e) wenn die abhängige Variable nicht explizit vorkommt:

$$\varphi\left(x, \frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

1. Man formt um in $\Phi\left(x, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ und verfährt wie bei d).

2. Man löst auf nach $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = F(x),$$

dann ist:

$$y = \int F(x) dx + C.$$

3. Man drückt x durch $\frac{dy}{dx}$ aus

$$x = F\left(\frac{dy}{dx}\right) = F(p).$$

Durch Differentiation nach y folgt

$$\frac{1}{p} = F(p) \frac{dp}{dy}$$

$$y = \int p F'(p) dp + C.$$

Durch Elimination von p erfolgt die Lösung.

f) $y = x \frac{dy}{dx} + f\left(\frac{dy}{dx}\right)$ *Clairautsche Differentialgleichung*. Differen-

tiation nach x ergibt, wenn $\frac{dy}{dx} = p$ gesetzt wird:

$$p = p + [x + f'(p)] \frac{dp}{dx}.$$

Es ist also entweder: 1. $\frac{dp}{dx} = 0$. Dann erhält man als *erste Lösung*

$$y = Cx + f(C), \text{ wo } C = p = \text{const}$$

oder 2. $x + f'(p) = 0$. Wird p aus dieser Gleichung und $y = px + f(p)$ eliminiert, so ergibt sich eine zweite (singuläre) Lösung. (Envelope zur ersten Lösung.)

g) Häufig führt die *Legendresche* oder *dual Transformation* zum Ziel. Man führt eine neue abhängige Veränderliche Y ein:

$$Y = px - y = \frac{dy}{dx}x - y, \text{ also } dY = p dx + x dp - dy = x dp.$$

Ferner führt man p als neue unabhängige Veränderliche ein:

$$X = p = \frac{dy}{dx},$$

dann wird

$$x = \frac{dY}{dp} = \frac{dY}{dX} = P,$$

dann kann man die Gleichung $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ überführen in die Form

$$F(P, PX - Y, X) = 0.$$

Ist das Integral dieser Gleichung bekannt, so kann das der ursprünglichen durch eine algebraische Elimination gefunden werden.

Ist z. B. ein Integral der neuen Gleichung:

$$f(X, Y) = 0,$$

dann gilt

$$0 = \frac{df}{dX} = \frac{\partial f}{\partial X} + \frac{\partial f}{\partial Y} \frac{dY}{dX} = \frac{\partial f}{\partial X} + x \frac{\partial f}{\partial Y}$$

und

$$-y \frac{\partial f}{\partial Y} = (Y - px) \frac{\partial f}{\partial Y} = Y \frac{\partial f}{\partial Y} + X \frac{\partial f}{\partial X}.$$

Elimination von X und Y aus diesen drei Gleichungen ergibt ein Integral (Gleichung zwischen x und y).

h) *Riccatische Differentialgleichung*.

$$1. \text{ Form: } a \frac{dy}{dx} + by^2 = cx^m,$$

$$2. \text{ Form: } x \frac{dy}{dx} - ay + by^2 = cx^n.$$

Führt man eine neue Unabhängige x ein durch $x = x^a$ und eine neue Abhängige u durch $y = ux$, so folgt aus der 2. Form:

$$a \frac{du}{dx} + bu^2 = cx^{\frac{n}{a}-3},$$

d. i. die 1. Form.

Da diese Differentialgleichung für $n = 2a$ den Fall b) (S. 103) repräsentiert, ist durch ihre Vermittlung die 2. Form in *endlicher* Form integrierbar im

Fall 1 für $n = 2a$ (bzw. die 1. Form ist in endlicher Form integrierbar für $m = 0$).

Die 2. Form ist ferner integrierbar im

Fall 2, wenn $\frac{n-2a}{2n}$ eine positive ganze Zahl ist (bzw. für die 1. Form,

wenn $m = -\frac{4i}{2i \pm 1}$, wo $i = 0$ oder eine positive ganze Zahl ist). Denn die Transformationen:

$$y = \frac{a}{b} + \frac{x^n}{y_1}; \quad y_1 = \frac{a+n}{c} + \frac{x^n}{y_2}, \quad y_2 = \frac{a+2n}{c} + \frac{x^n}{y_3}, \text{ usw.}$$

in die Form 2 eingesetzt führen diese über in Gleichungen der Form:

$$x \frac{dy_i}{dx} - (a + in) y_i + b y_i^2 = cx^n \quad (\text{falls } i \text{ gerade ist})$$

$$\text{bzw. } x \frac{dy_i}{dx} - (a + in) y_i + c y_i^2 = b x^n \quad (\text{falls } i \text{ ungerade ist}),$$

welche für $n = 2(a + in)$, d. h. wenn $\frac{n-2a}{2n} = i$ gleich einer positiven ganzen Zahl ist, in den Fall 1 übergehen.

Fall 3, wenn $\frac{n+2a}{2n}$ eine positive ganze Zahl ist. Denn die Transformationen

$$y = \frac{x^n}{y_1}; \quad y_1 = \frac{n-a}{c} + \frac{x^n}{y_2}; \quad y_2 = \frac{2n-a}{c} + \frac{x^n}{y_3}; \text{ usw.}$$

führen dann auf den 1. Fall.

i) Die in h) behandelte *Riccatische* Differentialgleichung ist ein Sonderfall der Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} = P + Qy + Ry^2 \quad (\text{allgemeine Riccatische D.G.}),$$

wo P, Q, R Funktionen von x sind.

Ist ein *partikuläres* Integral $y_1 = f_1(x)$ bekannt, so kann das vollständige durch Integrationen erhalten werden. Man setzt

$$y = y_1 + \frac{1}{v}$$

und erhält

$$\frac{dv}{dx} + (Q + 2Ry_1)v = -R \quad (\text{Lösung vgl. b) S. 103}).$$

Ist noch ein zweites partikuläres Integral bekannt, so kann das vollständige Integral durch eine einzige Integration erhalten werden. Man setzt

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{v_1}, \quad v = v_1 w$$

$$y = y_1 + \frac{1}{v_1 w}$$

und erhält:

$$w = 1 + C \cdot e^{\int \frac{R}{v_1} dx}.$$

Ist noch ein drittes partikuläres Integral y_3 bekannt, so kann das vollständige Integral ohne Integration gefunden werden. Man erhält als vollständiges Integral

$$\frac{(y - y_1)(y_2 - y_3)}{(y - y_2)(y_3 - y_1)} = C.$$

2. Lineare Differentialgleichungen.

Allgemeines.

Die lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung hat die allgemeine Form:

$$(1) \quad X_0 \frac{d^n y}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + X_n y = \Phi(D) y = V^1),$$

wo die X und V Funktionen von x allein sind³⁾.

¹⁾ Die symbolische Schreibweise $\Phi(D)y$ bedeutet folgendes:
Schreibt man:

$$\frac{dy}{dx} = Dy \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = D^2 y$$

$$\int y dx = D^{-1} y \quad \text{usw.}$$

so ist $\Phi(D)y$ als Polynom in D aufzufassen

$$= (X_0 D^n + X_1 D^{n-1} + \dots + X_{n-1} D + X_n) y.$$

Der Wert dieser Schreibweise liegt darin, daß man diesen Ausdruck unter Umständen wie einen algebraischen behandeln darf (vgl. S. 109). Als Beispiel für die Schreibweise sei die Taylorsche Formel symbolisch hingeschrieben:

$$f(x+h) = f(x) + h \cdot \frac{df(x)}{dx} + \frac{h^2}{2!} \cdot \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \dots$$

$$= (1 + hD + \frac{h^2 D^2}{2!} + \dots) f(x)$$

$$= e^{hD} f(x).$$

²⁾ Der Differentialausdruck:

$$\frac{d^n (X_0 y)}{dx^n} - \frac{d^{n-1} (X_1 y)}{dx^{n-1}} + \dots + (-1)^n X_n y$$

heißt der zu $\Phi(D)y$ „adjungierte“ Differentialausdruck. Ist er identisch mit $\Phi(D)y$, so heißt $\Phi(D)y$ „sich selbst adjungiert“.

Folgende Eigenschaften sind allen linearen Differentialgleichungen gemeinsam.

1. Ist y_1 eine beliebige partikuläre Lösung der Gleichung $\Phi(D)y = V$ und setzt man $y = y_1 + Y$, so folgt:

$$(2) \quad \Phi(D)Y + \Phi(D)y_1 = V$$

und

$$(3) \quad \Phi(D)Y = 0.$$

Die vollständige Lösung der homogenen Gleichung (3) zu y_1 hinzugefügt ergibt die vollständige Lösung der inhomogenen Gleichung (1).

2. Ist Y_1 eine Lösung der Gleichung $\Phi(D)Y = 0$, so ist auch $Y = C_1 Y_1$ eine Lösung.

Sind Y_1, Y_2, \dots, Y_n Lösungen der homogenen Gleichung, so ist auch jede lineare Kombination derselben eine Lösung. Die vollständige Lösung ergibt sich als lineare Kombination von n *unabhängigen* Lösungen.

3. Ist Y_1 eine Lösung von $\Phi(D)Y = 0$ und substituiert man den Ansatz $y = Y_1 z$ in die Gleichung $\Phi(D)y = V$, so erhält man für z eine Differentialgleichung, deren Ordnung um eine Einheit niedriger ist als die der ursprünglichen Differentialgleichung.

a) Allgemeine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten:

$$(4) \quad \Phi(D)y = \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + A_n y = Y(x) \quad (\text{inhom. Gl.})$$

$$(4a) \quad \text{bzw.} = 0 \quad (\text{homog. Gl.})$$

Man bildet die „charakteristische Gleichung“:

$$(5) \quad a^n + A_1 a^{n-1} + A_2 a^{n-2} + \dots + A_n = 0 = \Phi(a)$$

und löst dieselbe nach a auf. Sind ihre n Wurzeln gleich $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, und stimmen keine zwei dieser Zahlen überein, so ist (wenn A, B, \dots beliebige Konstanten bedeuten):

$$(6) \quad y_0 = A e^{\alpha x} + B e^{\beta x} + \dots$$

die allgemeine Lösung der *homogenen* Gleichung $\Phi(D)y = 0$.

Sind aber zwei Wurzeln, z. B. α und β , gleich, dann heißt die allgemeine Lösung der *homogenen* Gleichung:

$$(7) \quad y_0 = (A' + B'x) e^{\alpha x} + C e^{\gamma x} + \dots$$

Sind r Wurzeln gleich α . Dann heißt die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung:

$$(8) \quad y_0 = (A' + B'x + C'x^2 + \dots + R'x^{r-1}) e^{\alpha x} + \dots$$

Ist nun $f_0(x)$ ein beliebiges *partikuläres* Integral der inhomogenen Gleichung $\Phi(D)y = V$, so ist ihre vollständige Lösung (vgl. oben):

$$(9) \quad y = f_0(x) + y_0.$$

Verschiedene Fälle, in denen die Bestimmung eines partikulären Integrals $f_0(x)$ leicht möglich ist.

1. Ist V eine ganze rationale Funktion von x in der Diffgl.

$$\Phi(D)y = V,$$

so erhält man $f_0(x)$ in folgender symbolischer Form:

$$(10) \quad f_0(x) = \frac{1}{\Phi(D)} V.$$

Das bedeutet: Den Ausdruck

$$\frac{1}{\Phi(D)} = \frac{1}{\left(\frac{d^n}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + A_n\right)} = \frac{1}{(D^n + A_1 D^{n-1} + \dots + A_n)}$$

entwickle man nach steigenden Potenzen von D , als sei dieses Operationszeichen eine algebraische Größe. Ist hierbei die niedrigste wirklich auftretende Potenz von D die k -te und die höchste Potenz von x in V die m -te, so beginnt die Entwicklung von $\frac{1}{\Phi(D)}$ mit $\frac{1}{D^k}$ und braucht nicht über D^m hinausgeführt zu werden, weil alle höheren Differentialquotienten als $D^m V$ verschwinden.

2. Ist V eine Exponentialfunktion von x (oder enthält eine Exponentialfunktion als Faktor)

$$V = e^{ax} X,$$

wo X ganz und rational sei, so wird die gesuchte partikuläre Lösung

$$f_0(x) = \frac{1}{\Phi(D)} V = \frac{1}{\Phi(D)} e^{ax} X = e^{ax} \frac{1}{\Phi(D+a)} X.$$

3. V enthält einen Sinus oder Kosinus als Faktor.

$$V = X \cos(mx + a)$$

$$y = \frac{1}{\Phi(D)} X \cos(mx + a).$$

Setzt man

$$y_1 = \frac{1}{\Phi(D)} X \sin(mx + a),$$

so wird

$$y + i y_1 = \frac{1}{\Phi(D)} X e^{i(mx+a)} = e^{i(mx+a)} \frac{1}{\Phi(D+im)} X,$$

so daß nur noch der Ausdruck

$$\frac{1}{\Phi(D+im)} X$$

zu berechnen ist.

4. V enthält eine Potenz von x als Faktor.

$$V = x^m X$$

$$y = \frac{1}{\Phi(D)} x^m X = x^m \frac{1}{\Phi(D)} X + m x^{m-1} \left(\frac{d}{dD} \frac{1}{\Phi(D)} \right) X \\ + \frac{m(m-1)}{2!} x^{m-2} \left(\frac{d^2}{dD^2} \frac{1}{\Phi(D)} \right) X + \dots$$

Die Entwicklung wird bis zum $(m+1)$ -ten Gliede fortgesetzt.

5. Ein besonderer Fall einer linearen Differentialgleichung n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten ist die Gleichung

$$(11) \quad \frac{d^n y}{dx^n} = f(x).$$

n aufeinanderfolgende Integrationen ergeben als allgemeine Lösung:

$$(12) \quad y = \int \dots \int f(x) (dx)^n + B_1 x^{n-1} + B_2 x^{n-2} + \dots + B_{n-1} x + B_n,$$

wo die B_r beliebige Konstanten sind. Diese Lösung lautet einfacher:

$$(13) \quad y = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x f(t) (x-t)^{n-1} dt + B_1 x^{n-1} + \dots + B_n.$$

b) Allgemeine lineare Differentialgleichung mit veränderlichen Koeffizienten.

$$(14) \quad \frac{d^n y}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + X_{n-1} \frac{dy}{dx} + X_n y = V(x) \text{ (inhom. Gl.)},$$

$$(14a) \quad \text{bzw.} = 0 \text{ (homog. Gl.)}.$$

X_1, \dots, X_n und V sind Funktionen von x allein.

Sind y_1, y_2, \dots, y_n partikuläre Lösungen von $\Phi(D)y = 0$, so ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$(15) \quad y = A_1 y_1 + A_2 y_2 + \dots + A_n y_n,$$

wenn die Lösungen y_1, y_2, \dots, y_n *linear unabhängig* voneinander sind (ein Fundamentalsystem bilden).

Die Bedingung, daß diese Unabhängigkeit besteht, ist das Nichtverschwinden der Determinante:

$$(16) \quad \Delta = \begin{vmatrix} \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} & \frac{d^{n-1} y_2}{dx^{n-1}} & \dots & \frac{d^{n-1} y_n}{dx^{n-1}} \\ \frac{d^{n-2} y_1}{dx^{n-2}} & \frac{d^{n-2} y_2}{dx^{n-2}} & \dots & \frac{d^{n-2} y_n}{dx^{n-2}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{dy_1}{dx} & \frac{dy_2}{dx} & \dots & \frac{dy_n}{dx} \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{vmatrix}$$

Das allgemeine Integral der *inhomogenen* Gleichung $\Phi(D)y = V$ berechnet sich dann zu:

$$(17) \quad y = \sum_{r=1}^n y_r \left[C_r + \int \frac{V \Delta_r}{\Delta} dx \right]$$

Hierbei bedeutet Δ_r die zu $\frac{d^{n-1}y_r}{dx^{n-1}}$ gehörige Unterdeterminante in Δ (vgl. S. 7).

Die an dieser und anderen Stellen (vgl. S. 117) auftretende Form der Lösung einer inhomogenen Differentialgleichung führt uns auf eine allgemeinere Methode. Wir suchen eine Lösung von der Form:

$$(18) \quad y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, \xi) V(\xi) d\xi.$$

Die in dieser Gleichung auftretende Funktion $G(x, \xi)$ bezeichnet man als „*Greensche Funktion*“ des gegebenen Differentialausdrucks. Damit die Gleichung (18) wirklich eine Lösung der Differentialgleichung ist, muß die *Greensche Funktion* folgende Eigenschaften haben: Die Funktion $G(x, \xi)$ erfüllt als Funktion von x betrachtet die homogene Gleichung, mit Ausnahme des Punktes $x = \xi$. In diesem Punkt bleibt die Funktion samt ihren Ableitungen bis zur $n - 2$ -ten Ordnung stetig, die $n - 1$ -te Ableitung springt aber hier um den Betrag 1.

Die allgemeine Lösung bekommt man durch Hinzufügung einer linearen Kombination der n linear unabhängigen Lösungen der homogenen Gleichung.

Sind der Lösung gewisse *Bedingungen* auferlegt (Anfangsbedingungen, Randbedingungen, Nebenbedingungen), so können diese dadurch erfüllt werden, daß man die zur Verfügung stehenden n Konstanten entsprechend wählt.

Wird die Lösung nur zwischen 2 Punkten gesucht und werden in einem oder beiden dieser Punkte bestimmte *Randbedingungen* irgend welcher Art vorgeschrieben, so wählt man vorerst die Konstanten der homogenen Lösung derart, daß die Randbedingungen erfüllt werden. Es bleibt dann noch eine eindeutig bestimmte partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung übrig unter Randbedingungen, bei denen die homogene Gleichung keine von 0 verschiedene Lösung hat („*homogene Randbedingungen*“). Diese Lösung kann wieder in der Form (18) angesetzt werden, wobei das Integral jetzt nur zwischen den beiden Grenzen zu nehmen ist. Die *Greensche Funktion* muß nun selbst an den Grenzen die obigen homogenen Randbedingungen erfüllen. Sie ist dadurch eindeutig festgelegt.

Handelt es sich um einen „sich selbst adjungierten“ Differentialausdruck (vgl. S. 107), so hat die *Greensche Funktion* die besondere und für die Anwendung besonders wichtige Eigenschaft, daß sie *sym-*

metrisch ist in x und ξ , also:

$$G(x, \xi) = G(\xi, x).$$

Im Fall einer Gleichung 2. Ordnung ist das durch eine Transformation der gesuchten Funktion y in:

$$z = ye^{\int X_1 dx}$$

immer zu erreichen.

3. Besondere Formen von Differentialgleichungen.

a) $\frac{d^n y}{dx^n} = \varphi(y)$. Diese Gleichung ist durch Quadratur nur integrierbar für $n = 1$ und $n = 2$.

Für $n = 2$ ergibt Multiplikation mit $2\frac{dy}{dx}$ und Integration:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2 \int Y dy + A,$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \psi(y) + A.$$

Durch Trennung der Variablen ergibt sich als vollständiges Integral:

$$\int \frac{dy}{[\psi(y) + A]^{\frac{1}{2}}} = x + B.$$

b.) Jede Gleichung der Form:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = F\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

ist durch Quadratur integrierbar. Man setzt:

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = z$$

und erhält

$$\frac{dz}{dx} = F(z),$$

$$\int \frac{dz}{F(z)} = x + C.$$

Auflösung dieser Gleichung nach z ergibt:

$$z = \varphi(x + C) = \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}.$$

Zur Lösung dieser Gleichung vgl. die Lösung der Gleichung:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x). \quad (\text{Vgl. 2. a) 5 S. 110.})$$

b₂) Zur Lösung der Gleichung von der Form:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = F\left(\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}}\right)$$

setzt man

$$z = \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}}$$

und erhält

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = F(z).$$

Die Lösung hiervon ist nach a) (s. o.)

$$\int \frac{dx}{[A + 2 \int F(z) dz]^{\frac{1}{2}}} = x + B.$$

Die Auflösung nach $x = f(z) = \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}}$ ergibt durch Integration die endgültige Lösung (vgl. S. 110).

c) Eine Differentialgleichung *zweiter* Ordnung, in der eine der Veränderlichen nicht explizit auftritt, kann durch Substitution in eine Differentialgleichung *erster* Ordnung verwandelt werden (Erniedrigung der Ordnung).

$$1. \quad \psi\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}\right) = 0. \quad \text{Es fehlt } x.$$

Man setzt: $\frac{dy}{dx} = p$ und $\frac{d^2 y}{dx^2} = p \frac{dp}{dy}$ und betrachtet p als Funktion von y . Dann erhält man die Gleichung 1. Ordnung:

$$\psi\left(y, p, p \frac{dp}{dy}\right) = 0,$$

mit der Lösung $p(y) = \frac{dy}{dx}$, daher $x = \int \frac{dy}{p(y)} + A$.

$$2. \quad \psi\left(x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}\right) = 0. \quad \text{Es fehlt } y.$$

Setzt man $\frac{dy}{dx} = p$ und $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$ und betrachtet p als Funktion von x , so erhält man die Gleichung 1. Ordnung:

$$\psi\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right) = 0.$$

d) Eindimensionale Differentialgleichungen (vgl. S. 100). Ist (bei Betrachtung von y (ebenso wie x) als Größe von der ersten Dimension) die Differentialgleichung eindimensional, so setzt man:

$$y = xz \quad \text{und} \quad x = e^\phi;$$

wegen

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{1}{x}$$

wird dann

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{d\phi} + z, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{d^2z}{d\phi^2} + \frac{dz}{d\phi} \right) e^{-\phi}.$$

Bei Ausführung der Substitution zeigt sich, daß die neue unabhängige Variable ϕ nicht explizit in der Gleichung vorkommt. Die eindimensionale Gleichung läßt also wie unter c) eine Erniedrigung der Ordnung zu. Dasselbe gilt, wenn die vorgelegte Differentialgleichung eindimensional ist bei Betrachtung von y als Größe der m -ten Dimension. In diesem Fall setzt man

$$y = x^m z, \quad x = e^\phi,$$

also $y = z e^{m\phi}$

und $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dz}{d\phi} + mz \right) e^{(m-1)\phi},$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left\{ \frac{d^2z}{d\phi^2} + (2m-1) \frac{dz}{d\phi} + m(m-1)z \right\} e^{(m-2)\phi} \text{ usw.}$$

e) **Exakte Differentialgleichungen.** Eine exakte Differentialgleichung ist eine Gleichung von der Form

$$V = f \left(\frac{d^n y}{dx^n}, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}, \dots, \frac{dy}{dx}, y, x \right) = 0,$$

wenn $V dx$ das exakte (vollständige) Differential einer Funktion U ist, wobei U eine Funktion von $\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}$ bis y und x ist. $U = \text{const}$ ist dann ein intermediäres Integral. Eventuell läßt sich $V dx$ durch Multiplikation mit einem Faktor, nämlich einer Funktion von $\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}$ bis y und x zum exakten Differential machen. (*Integrierender Faktor*.)

4. Lineare Differentialgleichung 2. Ordnung.

a) Die allgemeine Form einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung ist:

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + X_1 \frac{dy}{dx} + X_2 y = X_3,$$

wo die X_1, X_2, X_3 Funktionen von x oder konstant sind.

Setzt man X_3 gleich Null und ist y_0 eine Lösung dieser reduzierten Gleichung, so lautet die vollständige Lösung der ursprünglichen Gleichung:

$$(2) \quad y = C_1 y_0 + C_2 y_0 \int \frac{dx}{y_0^2} e^{-\int X_1 dx} + y_0 \int \frac{dx}{y_0^2} \left\{ e^{-\int X_1 dx} \int y_0 X_3 e^{\int X_1 dx} dx \right\}.$$

b) Kann man für die reduzierte Gleichung keine Lösung erhalten, so kann man setzen:

$$(3a) \quad y = v \cdot e^{-\frac{1}{2} \int X_1 dx},$$

ferner

$$(3b) \quad I = X_2 - \frac{1}{2} \frac{dX_1}{dx} - \frac{1}{4} X_1^2.$$

Dann hat man statt der ursprünglichen Gleichung die Beziehung:

$$(4) \quad \frac{d^2 v}{dx^2} + Iv = X_2 \cdot e^{\frac{1}{2} \int X_1 dx},$$

deren Lösung jetzt zu versuchen ist, indem man die rechte Seite gleich 0 setzt und zunächst eine Lösung der so reduzierten Gleichung sucht. I heißt die *Invariante* der Koeffizienten der Differentialgleichung.

c) An Stelle der reduzierten Gleichung der ursprünglich vorgelegten linearen Differentialgleichung 2. Ordnung kann man sich demnach auf die Behandlung der Normalform

$$(5) \quad \frac{d^2 v}{dx^2} + Iv = 0$$

beschränken. Führt man die Gleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + X_1 \frac{dy}{dx} + X_2 y = 0$$

durch irgendeine Substitution $y = x f(x)$ über in

$$(6) \quad \frac{d^2 z}{dx^2} + X_1' \frac{dz}{dx} + X_2' z = 0,$$

so hat, nachdem das Glied mit $\frac{dz}{dx}$ durch die Substitution $z = w \cdot e^{-\frac{1}{2} \int X_1' dx}$ weggeschafft ist, diese Gleichung ebenfalls die Normalform

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + Iw = 0,$$

wo I dieselbe Funktion von X_1, X_2 ist, wie von X_1' und X_2' (daher ihre Bezeichnung als Invariante). Haben umgekehrt zwei Gleichungen (wie die für y, X_1, X_2 und z, X_1', X_2') dieselbe Normalform, so können sie ineinander transformiert werden.

Spezialfall: Ist $I = \alpha x^m$, so ist eine Lösung:

$$w = \sqrt{x} Z_{\frac{1}{m+2}} \left(\frac{2\sqrt{\alpha}}{m+2} x^{\frac{m+2}{2}} \right)$$

wo $Z_{\frac{1}{m+2}}$ eine Zylinderfunktion der Ordnung $\frac{1}{m+2}$ bedeutet (s. S. 63 ff.).

d) Integration durch Änderung der unabhängigen Variablen. Führt man in der ursprünglichen Gleichung ein:

$$x = \int e^{-\int X_1 dx} dx,$$

an Stelle von x , so verschwindet der Koeffizient des durch einfache Substitution von z auftretenden Gliedes mit $\frac{dy}{dx}$, und man erhält die

Gleichung:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} \left(\frac{dx}{dz} \right)^2 + X_2 y = 0.$$

Besonders einfach ist die Lösung in folgenden 2 Fällen:

1. Erfüllt z die Gleichung:

$$\mu \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 = X_2 z^2,$$

so wird

$$y = C_1 x^\alpha + C_2 x^\beta,$$

wo α und β die Wurzeln der Gleichung $m(m-1) + \mu = 0$ sind.

2. Auch im Falle

$$\mu \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 = X_2$$

läßt sich leicht ein Integral finden.

e) Die Variation der Konstanten¹⁾. Ist $y_1 = f_1(x)$ eine Lösung der reduzierten (homogenen) Gleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + X_1 \frac{dy}{dx} + X_2 y = 0,$$

so ergibt sich als weitere Lösung

$$(7) \quad y_2 = y_1 \int \frac{dx}{y_1^2} e^{-\int X_1 dx} \cdot G,$$

wo G eine beliebige Konstante ist. Die vollständige Lösung der reduzierten Gleichung wird dann

$$(8) \quad y = C_1 y_1 + C_2 y_2.$$

Um die Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden, werden die Größen C_1 und C_2 jetzt nicht mehr als Konstanten sondern als Funktionen von x betrachtet, die so zu bestimmen sind, daß die *inhomogene* Gleichung erfüllt wird.

Die Form der Lösung ist für die homogene und für die inhomogene Gleichung dieselbe. Der Unterschied liegt darin, daß die Konstanten, die in der Lösung der homogenen Gleichung auftreten, in der Lösung der inhomogenen Gleichung als Funktionen der unabhängigen Variablen erscheinen. Diese Methode wird als „Variation der Konstanten“ bezeichnet.

Dabei hat man eine Relation zwischen C_1 und C_2 frei.

Man fordert, daß

$$(9) \quad y_1 \frac{dC_1}{dx} + y_2 \frac{dC_2}{dx} = 0$$

ist und erhält aus

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)$$

¹⁾ Spezialfall von 2 b) S. 110.

durch Differentiation

$$\frac{dy}{dx} = C_1 \frac{dy_1}{dx} + C_2 \frac{dy_2}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = C_1 \frac{d^2y_1}{dx^2} + C_2 \frac{d^2y_2}{dx^2} + \frac{dC_1}{dx} \frac{dy_1}{dx} + \frac{dC_2}{dx} \frac{dy_2}{dx}.$$

Die Substitution dieser Werte von $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ in die inhomogene Gleichung ergibt

$$\frac{dC_1}{dx} \frac{dy_1}{dx} + \frac{dC_2}{dx} \frac{dy_2}{dx} = X_3.$$

Daraus folgt

$$C_2 = E + \frac{1}{G} \int X_3 y_1 e^{\int X_1 dx} dx,$$

(10)

$$C_1 = F - \frac{1}{G} \int X_3 y_2 e^{\int X_1 dx} dx,$$

wo E und F willkürliche Konstanten und G eine von der Wahl von y_1 und y_2 abhängende Konstante ist (s. oben).

Das vollständige Integral der inhomogenen Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + X_1 \frac{dy}{dx} + X_2 y = X_3$$

ist schließlich

$$(11) \quad y = E f_2(x) + F f_1(x) + \frac{1}{G} \int X_3(\xi) e^{\int X_1(x, \xi) dx} [f_2(x) f_1(\xi) - f_1(x) f_2(\xi)] d\xi,$$

wobei f_1 und f_2 partikuläre Integrale der homogenen Gleichung sind.

Der Faktor von X_3 im Integral stellt die Einwirkung dar, die von der Stelle ξ auf die Stelle x ausgeübt wird. Man bezeichnet ihn als *Greensche Funktion* (vgl. S. 111).

Ein Spezialfall zu e) ist folgende:

f) Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten mittels einer *Greenschen Funktion* (Erzwungene Schwingung), wo diese offenbar nur von $(x - \xi)$ abhängen kann. \ddot{x} bedeutet $\frac{d^2x}{dt^2}$, usw.

$$(12) \quad \ddot{x} + a \dot{x} + bx = f(t) = \text{beliebig gegebene Funktion}^1).$$

Der Ansatz:

$$(13) \quad x = \int_{-\infty}^t f(\tau) \varphi(t - \tau) d\tau$$

¹⁾ Die Bezeichnung ist hier dem physikalischen Problem angepaßt. Die Buchstaben t, τ, x entsprechen den obigen x, ξ, y .

mit der später zu bestimmenden Funktion $\varphi(t)$ führt zu

$$\dot{x} = f(t) \varphi(0) + \int_{-\infty}^t f(\tau) \dot{\varphi}(t-\tau) d\tau$$

$$\ddot{x} = \dot{f}(t) \varphi(0) + f(t) \dot{\varphi}(0) + \int_{-\infty}^t f(\tau) \ddot{\varphi}(t-\tau) d\tau.$$

Das gibt in die obige Differentialgleichung eingefügt:

$$(14) \quad f(t) = [\dot{f}(t) + a f(t)] \varphi(0) + f(t) \dot{\varphi}(0) + \int_{-\infty}^t f(\tau) (\ddot{\varphi} + a \dot{\varphi} + b \varphi) d\tau.$$

Da diese Gleichung für alle Werte von t erfüllt sein soll, ist ein naheliegender Ansatz:

$$\varphi(0) = 0; \quad \dot{\varphi}(0) = 1; \quad \ddot{\varphi} + a \dot{\varphi} + b \varphi = 0,$$

d. h.

$$(15) \quad \varphi(t) = \frac{e^{-\frac{a}{2}t}}{\sqrt{a^2 - 4b}} \left(e^{t\sqrt{\frac{a^2}{4} - b}} - e^{-t\sqrt{\frac{a^2}{4} - b}} \right) \quad \text{für positives Argument,}$$

$$= 0 \quad \text{für negatives Argument.}$$

Sonderfälle: I. $a^2 < 4b$ (schwache Dämpfung). Zur Abkürzung setzen wir

$$\sqrt{\frac{a^2}{4} - b} = i\omega_0; \quad \frac{a}{2} = \delta; \quad \varphi(t) = \frac{e^{-\delta t}}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

mit ω_0 als „Eigenfrequenz“. Die Lösung wird dann:

$$x = \int_{-\infty}^t f(\tau) \cdot \frac{e^{-\delta(t-\tau)}}{\omega_0} \sin \omega_0(t-\tau) d\tau.$$

II. $a^2 = 4b$ (aperiodischer Grenzfall)

$$x = \int_{-\infty}^t f(\tau) \cdot e^{-\delta(t-\tau)}(t-\tau) d\tau.$$

III. $a^2 > 4b$ (starke Dämpfung). Zur Abkürzung setzen wir

$$\delta_1 = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}; \quad \delta_2 = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

$$x = \int_{-\infty}^t f(\tau) \cdot \frac{e^{-\delta_1(t-\tau)} - e^{-\delta_2(t-\tau)}}{\delta_2 - \delta_1} d\tau.$$

Beispiele für verschiedene $f(t)$:

A. $f(t) = \frac{p}{s}$ im Intervall T bis $T+s$, im übrigen $= 0$ (kurzer Impuls).

$$\left. \begin{array}{ll} \text{I. } a^2 < 4b; & x = p \cdot \frac{e^{-\delta(t-T)}}{\omega_0} \sin \omega_0(t-T) \\ \text{II. } a^2 = 4b; & x = p \cdot e^{-\delta(t-T)}(t-T) \\ \text{III. } a^2 > 4b; & x = \frac{p}{\delta_2 - \delta_1} (e^{-\delta_1(t-T)} - e^{-\delta_2(t-T)}) \end{array} \right\} \quad \text{für } t > T$$

B. $f(t) = A \cdot \sin \omega t$ (Periodische Kraft).

$$x = B \cdot \cos(\omega t - \beta),$$

worin für

$$\begin{array}{ll} \text{I. } a^2 < 4b: & B = \frac{A}{\sqrt{(\delta^2 + \omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\delta^2 + \omega_0^2 - \omega^2}{2\delta \omega}. \\ \text{II. } a^2 = 4b: & B = \frac{A}{\sqrt{(\delta^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\delta^2 - \omega^2}{2\delta \omega}. \\ \text{III. } a^2 > 4b: & B = \frac{A}{\sqrt{(\delta_1 \delta_2 - \omega^2)^2 + (\delta_1 + \delta_2)^2 \omega^2}}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\delta_1 \delta_2 - \omega^2}{(\delta_1 + \delta_2) \omega}. \end{array}$$

f) Integration durch Reihenentwicklung.

Die Differentialgleichung 2. Ordnung sei eventuell durch Entwicklung auf die Form gebracht:

$$(16) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots) + \frac{dy}{dx} (b_0 + b_1 x + \dots) + y(c_0 + c_1 x + \dots) = d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \dots$$

Man macht jetzt den Ansatz:

$$(17) \quad y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots$$

Die Aufgabe ist dann, die Koeffizienten α_i dieser Entwicklung zu bestimmen. Durch Einsetzen des Ansatzes für y , sowie der daraus formal gebildeten Ableitungen:

$$\frac{dy}{dx} = \alpha_1 + 2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^2 + \dots$$

und

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 2\alpha_2 + 2 \cdot 3\alpha_3 x + 3 \cdot 4\alpha_4 x^2 + \dots$$

in die Differentialgleichung findet man, da die resultierende Gleichung in x identisch erfüllt sein muß (Koeffizientenvergleichung), das folgende Gleichungssystem für die α_i :

$$\alpha_0 c_0 + \alpha_1 b_0 + 2\alpha_2 a_0 = d_0$$

$$\alpha_0 c_1 + \alpha_1 (b_1 + c_0) + \alpha_2 (2a_1 + 2b_0) + \alpha_3 \cdot 2 \cdot 3 a_0 = d_1 \text{ usw.}$$

oder allgemein:

$$(18) \quad \sum_{i=0}^n \alpha_i (i(i-1)a_{n-i+2} + i b_{n-i+1} + c_{n-i}) = d_n.$$

Die Auflösung ist sukzessive möglich, wenn $a_0 \neq 0$ ist. Jede Gleichung enthält eine Unbekannte α_i mehr als die vorhergehenden.

und liefert daher unmittelbar deren Wert, wenn alle α_k für $k < i$ bekannt sind.

Man sieht sofort, daß zwei α beliebig angenommen werden können, z. B. α_0 und α_1 ; dann liefert die erste Gleichung α_2 , die zweite α_3 usw. (Vgl. S. 58.) Um eine Lösung y_0 der inhomogenen Gleichung zu finden, kann man z. B. $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$ setzen. Sind alle $d_i = 0$ und setzt man $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 0$, so erhält man eine Lösung y_1 der homogenen Gleichung, ebenso eine zweite Lösung y_2 für $d_i = 0$, $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 1$.

Die allgemeine Lösung ist dann $y_0 + A y_1 + B y_2$ mit beliebigem A und B .

Es bleibt natürlich zu untersuchen, ob die gefundene Entwicklung konvergiert. Eventuell wiederholt man das Verfahren, indem man in einem andern Punkt entwickelt (Substitution: $x' = x - x_0$). An singulären Stellen der Differentialgleichung macht man Lösungsansätze der Form:

$$x^r(\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots)$$

oder

$$x^r \ln x (\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots),$$

wo r passend zu wählen ist.

Analog verfährt man bei Differentialgleichungen höherer Ordnung.

Nach diesem Verfahren findet man z. B. folgende Lösungen praktisch wichtiger Differentialgleichungen:

1. *Gaußsche* Differentialgleichung:

$$x(1-x) \frac{d^2 y}{dx^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x] \frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0.$$

Lösung:

$$y = AF(\alpha, \beta, \gamma, x) + Bx^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma, x)$$

$F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ bedeutet hierin die *hypergeometrische Reihe*:

$$1 + \frac{\alpha\beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} x^3 + \dots$$

A und B sind willkürliche Konstanten.

2. *Legendresche* Differentialgleichung:

$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0.$$

n ist eine ganzzahlige Konstante.

Lösung: $y = AP_n(x) + BQ_n(x).$

P_n bzw. Q_n bedeuten Kugelfunktionen 1. bzw. 2. Art (s. Seite 54 ff.).

3. *Besselsche* Differentialgleichung:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2) y = 0.$$

n ist eine Konstante.

Lösung: $y = A I_n(x) + B N_n(x).$

I_n bzw. N_n bedeuten Zylinderfunktionen 1. und 2. Art (s. Seite 63 ff.).

5. Systeme von Differentialgleichungen (simultane Differentialgleichungen).

Sind die Gleichungen nach den Differentialquotienten aufgelöst, von 1. Ordnung, und existiert neben den n abhängigen Variablen y der n Gleichungen nur eine unabhängige Variable x , so hat das System die Form:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{aligned} \quad (1)$$

Auf diese Form können aber alle Systeme von n Differentialgleichungen mit n abhängigen Variablen einer unabhängigen Variablen gebracht werden. Kommt nämlich z. B. auch die 2. Ableitung vor, z. B. $\frac{d^2 y_1}{dx^2}$, so führt man eine neue abhängige Variable y_{n+1} ein durch die weitere Gleichung $\frac{dy_1}{dx} = y_{n+1}$ und ersetzt $\frac{d^2 y_1}{dx^2}$ durch $\frac{dy_{n+1}}{dx}$. Analog verfährt man beim Auftreten höherer Ableitungen.

Die vollständigen Lösungen stellen ein System von n Gleichungen dar von der Form:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n, C_1, C_2, \dots, C_n) &= 0 \\ \varphi_2(&) = 0 \\ &\dots \dots \dots \\ \varphi_n(&) = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

wo die C_i willkürliche Konstanten sind. Außerdem können singuläre Lösungen bestehen.

Die Differentialgleichungen können auch in der Form geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= \frac{X_1}{X} \\ \frac{dy_2}{dx} &= \frac{X_2}{X} \text{ usw.,} \end{aligned} \quad (3)$$

wo X, X_1 usw. Funktionen von x, y_1, y_2, \dots, y_n sind, also

$$(3') \quad \frac{dx}{X} = \frac{dy_1}{X_1} = \frac{dy_2}{X_2} = \dots = \frac{dy_n}{X_n}.$$

Die Lösungen können ferner auch in der Form geschrieben werden:

$$(4) \quad \begin{aligned} \Psi_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) &= C_1 \\ \Psi_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) &= C_2 \text{ usw.,} \end{aligned}$$

wo die Ψ_i voneinander unabhängig sind. (Nichtverschwinden der Funktionaldeterminante.)

Jede Funktion $\Pi (\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n)$ ist konstant gesetzt dann gleichfalls eine Lösung.

Es besteht dann die Gleichung:

$$(5) \quad X \frac{\partial \Pi}{\partial x} + X_1 \frac{\partial \Pi}{\partial y_1} + X_2 \frac{\partial \Pi}{\partial y_2} + \dots = 0.$$

a) Systeme linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

Die Zahl der Gleichungen sei gleich der Zahl der abhängigen Variablen.

Hat man nur zwei abhängige Variable x und y und die eine unabhängige Variable t , so lautet das System

$$(6) \quad \begin{aligned} f_1(D)x + \varphi_1(D)y &= T_1 \\ f_2(D)x + \varphi_2(D)y &= T_2. \end{aligned}$$

$f(D)x$ ist eine Abkürzung (s. S. 107) für

$$(7) \quad C_0 \frac{d^n x}{dt^n} + C_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + C_n x = (C_0 D^n + C_1 D^{n-1} + \dots + C_n)x.$$

T_1 und T_2 sind Funktionen von t allein.

Berechnet man nun $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ als Wurzeln der Gleichung

$$(8) \quad \varphi_2(\lambda) f_1(\lambda) - \varphi_1(\lambda) f_2(\lambda) = 0.$$

so ist die *vollständige* Lösung

$$(9) \quad \begin{aligned} x &= A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + A_m e^{\lambda_m t} + P(t) \\ y &= B_1 e^{\lambda_1 t} + B_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + B_m e^{\lambda_m t} + Q(t), \end{aligned}$$

worin die A_i willkürliche Konstanten sind.

Die B_i folgen aus den Relationen

$$A_i f_1(\lambda_i) + B_i \varphi_1(\lambda_i) = 0.$$

$P(t)$ ist dabei ein *partikuläres* Integral der Gleichung

$$\{\varphi_2(D) f_1(D) - \varphi_1(D) f_2(D)\} x = \varphi_2(D) T_1 - \varphi_1(D) T_2.$$

$Q(t)$ ist ein *partikuläres* Integral der Gleichung

$$\{\varphi_2(D) f_1(D) - \varphi_1(D) f_2(D)\} y = f_1(D) T_2 - f_2(D) T_1.$$

Dann besteht die *Lösung* der ursprünglichen Gleichung aus den beiden simultanen Gleichungen

$$(5) \quad \begin{cases} \psi(x, y, z) = 0 \\ \varphi(x, y) = C \end{cases}$$

Die Lösung bedeutet also gewisse Kurvenscharen auf beliebigen Flächen. Derartige Gleichungen, für die $K \neq 0$ ist, heißen auch „uneigentliche“ totale Differentialgleichungen.

Im Falle $K = 0$ wird die Lösung $\Phi(x, y, z) = \text{const}$ folgendermaßen gefunden. Man bildet die Hilfsgleichung

$$P dx + Q dy = 0$$

mit z als Konstante und sucht ihr Integral $u(x, y, z) = u = \text{const}$, also

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = 0;$$

dann bestimmt sich ein „integrierender“ Faktor λ durch

$$\lambda = \frac{1}{P} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{Q} \frac{\partial u}{\partial y},$$

welcher die Gleichung

$$\lambda(P dx + Q dy + R dz) = 0$$

auf die Form bringt:

$$du + S dz = 0,$$

worin

$$\lambda R - \frac{\partial u}{\partial z} = S$$

bedeutet. Führt man schließlich in S statt x, y, z die Variablen x, u, z mit Hilfe von $u(x, y, z) = u$ ein

$$S(x, y, z) = \bar{S}(x, u, z),$$

so wird in dieser neuen Form \bar{S} von x unabhängig. Das vollständige Integral $\psi(u, z) = \text{const}$ der Gleichung

$$du + \bar{S} dz = 0$$

gibt dann eine vollständige Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung, wenn man in $\psi(u, z)$ noch u durch $u(x, y, z)$ ersetzt:

$$\psi(u, z) = \Phi(x, y, z) = \text{const}.$$

Statt des oben bestimmten Wertes λ ist auch $\lambda \cdot F(\Phi)$ ein integrierender Faktor, wo F eine willkürliche Funktion der Lösung Φ bedeutet. Die Integrabilität, d. h. die Existenz eines integrierenden Faktors hat die geometrische Bedeutung, daß, wenn man x, y, z als Koordinaten im Raum auffaßt, man von einem gegebenen Punkt aus, längs solcher Kurvenstücke, die Lösung der Differentialgleichung sind, nicht jeden Punkt seiner Umgebung erreichen kann.

Für mehr als drei Variablen gelten analoge Aussagen im Mehrdimensionalen; für nur zwei Variablen existiert immer ein integrierender Faktor.

C. Partielle Differentialgleichungen.

I. Verschiedene Arten partieller Differentialgleichungen

1. Ordnung.

I Die in den Ableitungen lineare partielle Differentialgleichung mit zwei unabhängigen Variablen x und y und einer abhängigen Variablen z lautet:

$$(1) \quad P(x, y, z) \cdot p + Q(x, y, z) q = R(x, y, z)$$

wo

$$(2) \quad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Man bildet das System der gewöhnlichen Differentialgleichungen (siehe S. 122)

$$(3) \quad \frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

und bestimmt für dieses System zwei voneinander unabhängige Integrale $u(x, y, z) = a$ und $v(x, y, z) = b$.

Dann ist $\varphi(u, v) = 0$ eine Lösung der gegebenen Gleichung, wo φ eine beliebige Funktion ist. Diese Lösung enthält alle Lösungen mit Ausnahme der singulären.

Entsprechend wird bei mehr unabhängigen Variablen verfahren.

II. Hauptformen partieller Differentialgleichungen erster Ordnung.

1. Hauptform: $\psi(p, q) = 0$ oder $q = f(p)$.

Die Variablen treten nicht explizit auf.

Das vollständige Integral ist

$$z = ax + by + c, \quad \text{wo} \quad \psi(a, b) = 0 \quad \text{oder} \quad b = f(a),$$

also

$$z = ax + yf(a) + c.$$

2. Hauptform: $\chi(z, p, q) = 0$.

Die unabhängigen Variablen treten nicht explizit auf.

Man setzt $z = z(x + ay) = z(\xi)$. Es wird dann

$$p = \frac{dz}{d\xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{dz}{d\xi}, \quad q = \frac{dz}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} = a \frac{dz}{d\xi},$$

das führt auf $\chi\left(z \frac{dz}{d\xi}, a \frac{dz}{d\xi}\right) = 0$, also auf eine gewöhnliche Differential-

gleichung. Es wird $\frac{dz}{dz} = \varphi(z, a)$,

also

$$x + ay + b = \int \frac{dz}{\varphi(z, a)} = F(z, a).$$

3. Hauptform: $\varphi(x, p) = \psi(y, q)$. (Separation der Variabeln.)

Man setzt beide Seiten gleich einer Konstanten a und erhält

$$p = \vartheta_1(x, a), \quad q = \vartheta_2(y, a).$$

Die Integrale dieser beiden Gleichungen

$$z = f_1(x, a) + \text{einer von } x \text{ unabhängigen Größe}$$

$$z = f_2(y, a) + \text{einer von } y \text{ unabhängigen Größe}$$

sind enthalten in

$$z = f_1(x, a) + f_2(y, a) + b,$$

der vollständigen Lösung der ursprünglichen Gleichung.

4. Hauptform: $z = px + qy + \varphi(p, q)$.

Die vollständige Lösung dieser Gleichung ist

$$z = ax + by + \varphi(a, b).$$

2. Partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung.

a) Die in den 2. Ableitungen lineare Gleichung 2. Ordnung.

Sie lautet:

$$(1) \quad Rr + 2Ss + Tt = V,$$

wobei

$$(2) \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial q}{\partial y}$$

ist und R, S, T, V Funktionen von x, y, z , $\frac{\partial z}{\partial x} = p$, $\frac{\partial z}{\partial y} = q$ sind.

Von praktisch besonderer Bedeutung ist der speziellere Fall, wo die R, S, T nur von x und y abhängen. Dann kann man die Differentialgleichung durch eine Transformation:

$$\xi = \xi(x, y)$$

$$\eta = \eta(x, y)$$

in eine der folgenden Normaltypen überführen:

$$\alpha) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = F\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}\right), \text{ (elliptischer Typus),}$$

$$(3) \quad \beta) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = F\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}\right), \text{ (hyperbolischer „),}$$

$$\gamma) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} = F\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}\right), \text{ (parabolischer „),}$$

je nachdem, ob die Determinante:

$$\begin{vmatrix} RS \\ ST \end{vmatrix} > 0, \text{ oder } < 0, \text{ oder } = 0 \text{ ist.}$$

Diese Transformation findet man auf folgende Weise. Man bildet die Hilfgleichung:

$$R dy^2 + T dx^2 - 2S dx dy = 0.$$

Diese in bezug auf $\frac{dy}{dx}$ quadratische Differentialgleichung läßt sich nach ihren Wurzeln zerlegen und liefert 2 gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung. Lösen wir diese Gleichungen in der Form:

$$f_1(x, y) = a$$

bzw.

$$f_2(x, y) = b,$$

so werden dadurch 2 Kurvenscharen in der x, y -Ebene definiert mit den (evtl. komplexen) Parametern a bzw. b . Führt man diese a und b als neue Variable ein, so reduziert sich unsere Ausgangsgleichung auf folgende Form:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial a \partial b} = F\left(a, b, z, \frac{\partial z}{\partial a}, \frac{\partial z}{\partial b}\right).$$

Setzt man nun:

$$a = \xi + \eta$$

$$b = \xi - \eta,$$

so erhält man die Form (β) , setzt man:

$$a = \xi + i\eta$$

$$b = \xi - i\eta,$$

so erhält man die Form (α) . Wird schließlich $a = b$ (wegen $S^2 = RT$), so setzt man:

$$a = b = \xi,$$

η = beliebige Funktion von x und y , und erhält die Form (γ) .

b) Methode der Separation der Variablen.

Eine häufig brauchbare Methode zur Zurückführung, besonders der in der Physik vorkommenden homogenen partiellen linearen Differentialgleichungen auf gewöhnliche Differentialgleichungen besteht darin, daß man partikuläre Lösungen von der Form

$$(4) \quad |V = f_1(q_1) \cdot f_2(q_2) \dots f_n(q_n)$$

sucht, wo V die abhängige Variable, q_1, q_2, \dots, q_n die unabhängigen Variablen, z. B. die Koordinaten des Raumes und eventuell der Zeit

bedeuten. Von der Wahl dieser Koordinaten hängt dann die spezielle Form der Gleichungen bzw. der Lösungen ab. Durch lineare Kombination der Partikularlösungen findet man die vollständige Lösung.

Setzt man den Ansatz für V in die gegebene Differentialgleichung ein, so ist es häufig möglich, z. B. durch Division mit $f_2 \cdot f_3 \dots f_n$, Φ auf eine Form zu bringen

$$(5) \quad \Phi_1 \left(q_1, \frac{\partial f_1}{\partial q_1}, \frac{\partial^2 f_1}{\partial q_1^2} \right) + \Phi_2 \left(q_2, q_3 \dots q_n, \frac{\partial f_2}{\partial q_2}, \dots \right) = 0,$$

d. h. auf eine solche, daß die Gleichung in zwei Summanden zerfällt von denen der eine Φ_1 die eine unabhängige Variable, z. B. q_1 , alle enthält, während im andern q_1 nicht vorkommt. Da diese Gleichung für beliebige Werte von q_1 gelten soll, muß Φ_1 gleich einer Konstanten sein.

Wir setzen daher $\Phi_1 = \text{const} = -\Phi_2$. Die erste Gleichung ist eine gewöhnliche Differentialgleichung, die zweite sucht man analog wie die ursprüngliche weiter zu zerlegen.

Als Beispiel betrachten wir die Gleichung (vgl. unten 8, b)

$$(6) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial V}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \lambda^2 V = 0.$$

Wir setzen $V = P(\varrho) \Phi(\varphi) Z(z)$ und setzen ein:

$$P'' \cdot \Phi \cdot Z + \frac{P'}{\varrho} \cdot \Phi \cdot Z + \frac{1}{\varrho^2} \Phi'' \cdot P \cdot Z + P \Phi Z'' + \lambda^2 P \Phi Z = 0$$

oder

$$(7) \quad \frac{P''}{P} + \frac{P'}{\varrho P} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\Phi''}{\Phi} + \frac{Z''}{Z} + \lambda^2 = 0.$$

Es wird also:

$$\frac{Z''}{Z} = -k^2; \quad Z = e^{\pm i k z}$$

$$\frac{\Phi''}{\Phi} = -m^2; \quad \Phi = e^{\pm i m \varphi}$$

$$\frac{P''}{P} + \frac{P'}{\varrho P} - \frac{m^2}{\varrho^2} - k^2 + \lambda^2 = 0; \quad P = Z_m(\varrho \sqrt{\lambda^2 - k^2}) \quad (\text{vgl. S. 63})$$

also

$$V = e^{\pm i(kz \pm m\varphi)} Z_m(\varrho \sqrt{\lambda^2 - k^2}),$$

wo k und m beliebige Konstanten sind.

Weitere partikuläre Lösungen sind auch Ausdrücke der Form

$$\frac{\partial V}{\partial h}, \quad \frac{\partial V}{\partial m}, \quad \int V \psi(h) dh \text{ usw.}$$

Mit Hilfe dieser Methode findet man z. B. Lösungen von folgenden Differentialgleichungen:

1. $\Delta V = 0$ in der Ebene¹⁾.

$$a) \quad q_1 = x, \quad q_2 = y; \quad \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0.$$

$$\text{Partikuläre Lösung: } V_k = e^{\pm k(x \pm iy)}$$

$$\text{bzw. } V = f_1(x + iy) + f_2(x - iy)$$

$$V_0 = (a_1 x + a_2)(b_1 y + b_2).$$

$$b) \quad q_1 = \varrho, \quad q_2 = \varphi; \quad \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial V}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0.$$

$$\text{Partikuläre Lösung: } V_k = \varrho^{\pm k} e^{\pm i k \varphi}$$

$$V_0 = a_1 + a_2 \ln \varrho.$$

2. $\Delta V = 0$ im Raume.

$$a) \quad q_1 = x, \quad q_2 = y, \quad q_3 = z; \quad \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

$$\text{Partikuläre Lösung: } V_{klm} = e^{(kx + ly + mz)}, \text{ wo } k^2 + l^2 + m^2 = 0.$$

$$b) \quad q_1 = \varrho, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = z; \quad \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial V}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

$$\text{Partikuläre Lösung: } V_{km} = e^{\pm i(kx + m\varphi)} Z_m(i k \varrho)$$

$$V_{0m} = (a_1 z + a_2) \varrho^m e^{\pm i m \varphi}$$

$$V_{k0} = e^{\pm i k z} (b_1 \varphi + b_2) Z_0(i k \varrho)$$

$$V_{00} = (a_1 z + a_2)(b_1 \varphi + b_2)(c_1 + c_2 \ln \varrho).$$

$$c) \quad q_1 = r, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = \vartheta;$$

$$r^2 \Delta V = \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Partikuläre Lösung:

$$V_n = (a_1 r^n + a_2 r^{-(n+1)}) Y_n(\vartheta, \varphi)^3)$$

$$\text{bzw. } V_{nk} = (a_1 r^n + a_2 r^{-(n+1)}) e^{\pm i k \varphi} P_n^k(\cos \vartheta)^4).$$

$$3. \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = a \frac{\partial V}{\partial y},$$

$$V_k = e^{\pm i k x - \frac{k^2}{a} y}$$

$$V_0 = a_1 x + a_2.$$

¹⁾ Die inhomogene Gleichung $\Delta V = a$ wird gelöst durch $V = V_1 + V_2$, wo $\Delta V_1 = 0$, $\Delta V_2 = a$ bei z. B. $V_2 = \frac{a}{2} x^2$ oder $\frac{a}{2} y^2$ oder $\frac{a r^2}{4}$.

³⁾ Z_m bedeutet eine Zylinderfunktion m -ter Ordnung (vgl. S. 63).

⁴⁾ Y_n bedeutet eine Kugelfunktion n -ter Ordnung (vgl. S. 59).

⁵⁾ P_n^k bedeutet eine zugeordnete Kugelfunktion (vgl. S. 61).

$$4. \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \quad (\text{vgl. 1a}).$$

$$V_k = e^{\pm k(a \pm ay)} \quad \text{bzw.} \quad V = f_1(x + ay) + f_2(x - ay)$$

$$V_0 = (a_1 x + a_2)(b_1 y + b_2).$$

$$5. \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + a \frac{\partial V}{\partial x} = b^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2},$$

$$V_k = e^{-\frac{a}{2}x \pm \frac{iky}{b} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - k^2}y}$$

$$V_0 = (a_1 + a_2 e^{-ax})(b_1 y + b_2).$$

$$6. \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = a \frac{\partial V}{\partial t}; \quad V_{\alpha, \beta, \gamma} = e^{+(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)t \pm (\alpha x \pm \beta y \pm \gamma z)\sqrt{a}}.$$

$$7. \quad \Delta V + \lambda^2 V = 0 \text{ in der Ebene.}$$

$$a) \quad q_1 = x, \quad q_2 = y; \quad \Delta V + \lambda^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \lambda^2 V = 0.$$

$$V_{ka} = e^{\pm a\sqrt{k^2 - a^2}\lambda^2 + i y \sqrt{k^2 + (1 - a^2)\lambda^2}}$$

$$V_{0a} = e^{\pm i \lambda a x \pm i \lambda y \sqrt{1 - a^2}} \quad (\text{bzw.} = e^{\pm i(m x + n y)}, \text{ wo } m^2 + n^2 = \lambda^2)$$

$$V_{k0} = e^{\pm k x \pm i y \sqrt{k^2 + \lambda^2}}$$

$$V_{00} = (a_1 x + a_2) e^{i \lambda y}.$$

$$b) \quad q_1 = \varrho, \quad q_2 = \varphi.$$

$$V_k = e^{i k \varphi} Z_k(\lambda \varrho)$$

$$V_0 = (a_1 \varphi + a_2) Z_0(\lambda \varrho).$$

$$8. \quad \Delta V + \lambda^2 V = 0 \text{ im Raume.}$$

$$a) \quad q_1 = x, \quad q_2 = y, \quad q_3 = z.$$

$$V_{lm} = e^{i(kx + ly + mz)}, \quad \text{wo } \lambda^2 = k^2 + l^2 + m^2.$$

$$b) \quad q_1 = \varrho, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = z.$$

$$V_{km} = e^{\pm i(kx + m\varphi)} Z_m(\varrho \sqrt{\lambda^2 - k^2}).$$

$$c) \quad q_1 = r, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = \theta.$$

$$V_n = \frac{1}{\sqrt{r}} Z_{n+\frac{1}{2}}(\lambda r) Y_n(\theta, \varphi) \quad (\text{vgl. 2}).$$

Partikuläre Lösungen der Maxwell'schen Gleichungen.

Auf eine Gleichung der Form: $\Delta V + \lambda^2 V = 0$ lassen sich auch die *Maxwell'schen* Gleichungen zurückführen:

$$\frac{s}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sigma \mathfrak{E} = \text{rot } \mathfrak{H}^1).$$

$$(1) \quad -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \text{rot } \mathfrak{E}.$$

$$\text{div } \mathfrak{H} = 0.$$

¹⁾ Betreffs der Vektorsymbole vgl. den Abschnitt „Vektoranalysis“ sowie S. 216.

Durch Einsetzen der folgenden Größen: $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 e^{i\omega t}$; $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 e^{i\omega t}$
 $p = \sqrt{\varepsilon\mu - i \frac{4\pi\sigma\mu}{\omega}}$ (p = komplexer Brechungsindex), $\mathfrak{H}_0 = \frac{i p}{\mu} \mathfrak{M}_0$,
 wo ω ein willkürlicher Parameter, die Frequenz, ist und \mathfrak{E}_0 , \mathfrak{H}_0 und \mathfrak{M}_0 von t unabhängig sein sollen und durch die Ersetzung aller
 Längen l durch die dimensionslosen „Längen“ l' , wobei $l' = l \cdot \frac{\omega p}{c}$,
 erhält man die in \mathfrak{E}_0 und \mathfrak{M}_0 symmetrische Form:

$$(2) \quad \begin{cases} \mathfrak{E}_0 = \text{rot}' \mathfrak{M}_0 \\ \mathfrak{M}_0 = \text{rot}' \mathfrak{E} \\ \text{div}' \mathfrak{M}_0 = 0. \end{cases} \quad \left(\text{rot}' = \frac{\text{rot}}{\frac{\omega p}{c}} \text{ usw.} \right),$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung wird erleichtert durch Einführung des transformierten *Hertzschen* Vektors \mathfrak{P}_0 durch die Definitionsgleichungen:

$$(3) \quad \begin{cases} \mathfrak{E} = \text{grad}' \text{div}' \mathfrak{P}_0 + \mathfrak{P}_0 = \text{rot}' \text{rot}' \mathfrak{P}_0, \\ \mathfrak{M}_0 = \text{rot}' \mathfrak{P}_0. \end{cases}$$

Dies führt auf die eine Differentialgleichung:

$$(4) \quad \begin{aligned} &\text{grad}' \text{div}' \mathfrak{P}_0 - \text{rot}' \text{rot}' \mathfrak{P}_0 + \mathfrak{P}_0 = 0, \\ &\text{oder} \quad \Delta' \mathfrak{P}_0 + \mathfrak{P}_0 = 0. \end{aligned}$$

Das sind Differentialgleichungen der Form $\Delta V + V = 0$ für die (*Cartesischen*) Komponenten von \mathfrak{P}_0 . Aus \mathfrak{P}_0 findet man durch Einsetzen die Komponenten von \mathfrak{E}_0 und \mathfrak{M}_0 .

1. *Cartesische* Koordinaten (x', y', z'):

$$P_{0x} = C e^{i(kx' + ly' + mz')}; \quad P_{0y} = 0; \quad P_{0z} = 0; \quad (k^2 + l^2 + m^2 = 1),$$

$$E_{0x} = C(1 - k^2) \cdot e^{i(kx' + ly' + mz')},$$

$$E_{0y} = -C \cdot k l \cdot e^{i(-)},$$

$$E_{0z} = -C \cdot k m \cdot e^{i(-)},$$

$$M_{0x} = 0,$$

$$M_{0y} = C \cdot i m \cdot e^{i(-)},$$

$$M_{0z} = -C \cdot i l \cdot e^{i(-)}.$$

Weitere Lösungen findet man durch zyklische Vertauschung der Komponenten, sowie durch Vertauschung von \mathfrak{E}_0 und \mathfrak{M}_0 .

2. Zylinderkoordinaten (ϱ', φ, z').

$$P_{0x} = C_1 \cdot e^{i(n\varphi + kz')} Z_n(\varrho' \sqrt{1 - k^2})$$

$$P_{0y} = C_2 \cdot e^{i(-)} \cdot Z_n(-)$$

$$P_{0z} = C_3 \cdot e^{i(-)} \cdot Z_n(-)$$

oder

$$P_{0\varrho} = (C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi) e^{i(-)} Z_n(-)$$

$$P_{0\varphi} = (-C_1 \sin \varphi + C_2 \cos \varphi) e^{i(-)} Z_n(-)$$

$$P_{0z} = C_3 e^{i(-)} Z_n(-).$$

Für $C_1 = C_2 = 0$ wird dann¹⁾:

$$E_{0\varrho} = C_3 \cdot i k \sqrt{1 - k^2} Z'_n(\varrho' \sqrt{1 - k^2}) e^{i(n\varphi + kx)}$$

$$E_{0\varphi} = -C_3 \frac{n k}{\varrho'} Z_n(-) \cdot e^{i(-)}$$

$$E_{0z} = C_3 (1 - k^2) Z_n(-) e^{i(-)}$$

$$M_{0\varrho} = C_3 \frac{i n}{\varrho'} Z_n(-) e^{i(-)}$$

$$M_{0\varphi} = C_3 \sqrt{1 - k^2} Z'_n(-) \cdot e^{i(-)}$$

$$M_{0z} = 0.$$

Die Lösungen für $C_1 \neq 0$ und $C_2 \neq 0$ sind komplizierter.

Weitere Lösungen erhält man durch Vertauschung der \mathfrak{E}_0 und \mathfrak{M}_0 .

3. Polar-Koordinaten (r', φ, θ).

$$P_{0x} = \frac{C_1}{\sqrt{r'}} Z_{n+\frac{1}{2}}(r') Y_n(\theta, \varphi)$$

$$P_{0y} = \frac{C_2}{\sqrt{r'}} Z \cdot Y$$

$$P_{0z} = \frac{C_3}{\sqrt{r'}} Z \cdot Y.$$

Hieraus folgen Lösungen für \mathfrak{E} und \mathfrak{M} .

Um ein besonders einfaches und symmetrisches System zu erhalten, kann man wie folgt verfahren. Setzt man:

$$\frac{Y_n}{r^{n+1}} = V_n;^2) \quad r^{n+\frac{1}{2}} Z_{n+\frac{1}{2}}(r) = L_n(r); \quad \left(V_n L_n = \frac{Y_n Z_{n+\frac{1}{2}}(r)}{\sqrt{r}} \right)$$

so wird

$$\Delta(V_n L_n) + V_n L_n = 0.$$

Für L_n gelten folgende Formeln:

$$L_n'' - \frac{2n}{r} L_n' + L_n = 0$$

$$L_n(2n+1) = L_{n+1} + r^2 L_{n-1}$$

$$L_n' = r L_{n-1}$$

$$\Delta L_n = 2(n+1) L_{n-1} - L_n$$

$$\left(\frac{\partial L_n}{\partial x} = x L_{n-1} \right)$$

$$\text{grad } L_n = r L_{n-1}$$

für V_n :

$$\Delta V_n = 0$$

$$r \frac{\partial V_n}{\partial r} = x \cdot \frac{\partial V_n}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial V_n}{\partial y} + z \cdot \frac{\partial V_n}{\partial z} = -(n+1) V_n = (r \text{ grad } V_n).$$

¹⁾ Z' bedeutet die Ableitung von Z nach seinem Argument.

²⁾ Es gibt $2n-1$ verschiedene V_n und V_n .

Es gilt also auch:

$$\Delta \left(L_{n+1} \cdot \frac{\partial V_n}{\partial x} \right) + L_{n+1} \cdot \frac{\partial V_n}{\partial x} = 0.$$

Die Gleichung $\Delta \mathfrak{P} + \mathfrak{P} = 0$ hat daher die partikuläre Lösung:

$$\mathfrak{P} = L_{n+1}(r) \operatorname{grad} V_n(r, \varphi, \theta).$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathfrak{P} &= L_n [r \operatorname{grad} V_n] = \mathfrak{M} & (\operatorname{div} \mathfrak{M} = 0, \quad M_r = 0) \\ \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{P} &= \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{P} + \mathfrak{P} = -r(n+1)L_{n-1}V_n \\ &\quad + (L_{n+1} - (n+1)L_n) \operatorname{grad} V_n = \mathfrak{E} \\ \operatorname{div} \mathfrak{P} &= -(n+1) \cdot V_n L_n & (\operatorname{div} \mathfrak{E} = 0) \\ &\quad \left(E_r = -\frac{n(n+1)V_n L_n}{r} \right). \end{aligned}$$

Ausgeschrieben lauten diese Lösungen:

$$\begin{aligned} E_{0r} &= \frac{1}{r^{\frac{1}{2}}} \cdot Z_{n+\frac{1}{2}}(r') Y_n(\theta, \varphi) \\ E_{0\varphi} &= \frac{1}{n(n+1)\sqrt{r'} \cdot \sin \theta} \left(Z'_{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2r'} Z_{n+\frac{1}{2}} \right) \cdot \frac{\partial Y_n}{\partial \varphi}(\theta, \varphi) \\ E_{0\theta} &= \frac{1}{n(n+1)\sqrt{r'}} \left(Z'_{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2r'} Z_{n+\frac{1}{2}} \right) \cdot \frac{\partial Y_n}{\partial \theta}(\theta, \varphi) \\ M_{0r} &= 0 \\ M_{0\varphi} &= \frac{-1}{n(n+1) \cdot \sqrt{r'}} Z_{n+\frac{1}{2}}(r') \frac{\partial Y_n}{\partial \theta}(\theta, \varphi) \\ M_{0\theta} &= \frac{1}{n(n+1) \cdot \sin \theta \cdot \sqrt{r'}} Z_{n+\frac{1}{2}}(r') \frac{\partial Y_n}{\partial \varphi}(\theta, \varphi). \end{aligned}$$

c) Randwertaufgaben.

Ein weiteres Problem besteht darin, Lösungen zu finden, die gewisse „Randbedingungen“ erfüllen. Diese bestehen z. B. darin, daß auf dem Rand, d. h. auf bestimmten Kurven bzw. Flächen V vorgeschrieben ist. Das übliche Verfahren ist dann folgendes: Man transformiert die gegebene Differentialgleichung auf solche Variablen, daß eine Variable q_r auf dem Rand konstant $= c$ wird und entwickelt das hier gegebene V nach solchen Funktionen der andern Variablen, wie sie in den partikulären Lösungen der Differentialgleichung für diese Variablen auftreten. Man stellt jetzt eine lineare Kombination von Partikularlösungen auf, setzt in ihr $q_r = c$ und wählt ihre Koeffizienten so, daß sie mit der Entwicklung von V für $q_r = c$ übereinstimmt; dann liefert sie (mit wieder variablem q_r) eine Lösung der Differentialgleichung und erfüllt für $q_r = c$ die Randbedingung.

Es ist wichtig zu bemerken, daß bei manchen Differentialgleichungen nicht beliebige Randbedingungen zu erfüllen sind, z. B. bei

der Gleichung $\frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y_i^2}$, welche eine Gleichung vom hyperbolischen Typus ist, im Gegensatz zu $\Delta V = 0$, die den elliptischen Typus besitzt.

Häufig ist es nötig (z. B. bei der Lösung von $\Delta V = 0$ für das Innere eines Rechtecks, wenn V auf der Berandung gegeben ist), die Lösung aus mehreren Teilen additiv aufzubauen, die so gewählt sind, daß die Randbedingungen jeweils nur auf einem Teil der Berandung erfüllt werden und auf dem übrigen Teil einfacheren Bedingungen (z. B. $V = 0$) genügen. In Weiterführung dieses Verfahrens gelangt man zu der Lösungsform:

$$V = \int d\xi_1 d\xi_2 \dots G(\xi, x_i) V(\xi).$$

Hier bedeuten x_i die unabhängigen Variablen der Differentialgleichung und ξ_i die Variablen der Berandung. Die Integration ist über die Berandung zu erstrecken.

$G(\xi, x)$ spielt also die Rolle der *Greenschen* Funktion. Sie erfüllt für die Variable x die Differentialgleichung. Sie verschwindet für die Berandung außer im Punkt ξ und wird hier derart unendlich, daß $\int d\xi G(\xi, x) = 1$ wird. Die Schwierigkeit, eine solche Funktion $G(\xi, x)$ zu finden, ist aber in der Regel so groß, daß diese Lösungsform wesentlich nur theoretisches Interesse hat.

Im Falle einer linearen inhomogenen Differentialgleichung: $\Phi(V) = \varphi(x, y, \dots)$, wo $\Phi(V)$ eine lineare Kombination von V und seinen Ableitungen mit von den unabhängigen Variablen abhängigen Koeffizienten bedeutet, ist gleichfalls eine Lösung von der Form:

$$V = \int d\xi G(\xi, x) \varphi(\xi)$$

möglich. Hier ist die Integration über den ganzen Bereich zu erstrecken. Die *Greensche* Funktion $G(\xi, x)$ erfüllt als Funktion von x die homogene Gleichung, außer im Punkt $x = \xi$. Hier wird sie derart unendlich, daß $\int d\xi \Phi(G(\xi, x)) = 1$ wird.

Liegen Randbedingungen vor, so erfüllt man diese so weit wie möglich durch Lösungen der homogenen Gleichung. Es bleiben dann noch *homogene* Randbedingungen übrig, die von der Lösung der inhomogenen Gleichung zu erfüllen sind. Diesen letzteren muß dann auch die *Greensche* Funktion genügen.

Die Gleichung $\Phi(V) + \lambda V = 0$ hat häufig auch bei homogenen Randbedingungen von 0 verschiedene Lösungen für gewisse Werte von λ . Diese λ_i heißen dann „*Eigenwerte*“ und die zu ihnen gehörenden Lösungen „*Eigenlösungen*“.

d) Riemanns Integrationsmethode.

1. Es sei gegeben eine partielle Differentialgleichung vom hyperbolischen Typus:

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Setzt man $at = y$, so wird

$$(1') \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$\frac{\partial u}{\partial y}$ und $\frac{\partial u}{\partial x}$ seien stetig. Wenn neben $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ auch noch $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ existiert und stetig ist, so lautet die allgemeinste Lösung:

$$(2) \quad u = f_1(x+y) + f_2(x-y),$$

unter f_1 und f_2 willkürliche (zweimal stetig differenzierbare) Funktionen verstanden.

Randbedingung: Ist längs einer Kurve c im x, y -Diagramm $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ gegeben, so ist in einem Punkt x_1, y_1 die gesuchte Lösung $u(x_1, y_1)$ gegeben durch die längs der Kurve c erstreckten Integrale:

$$(3) \quad 2 \cdot u(x_1, y_1) = \int_a^\alpha \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) (dx - dy) + \int_a^\beta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) (dx + dy),$$

wobei als untere Grenze a ein beliebiger Punkt der Kurve c , als obere Grenze α und β aber die Schnittpunkte der Kurve c mit den beiden durch (x_1, y_1) unter 45° gehenden Geraden:

$$(4) \quad \begin{cases} x - y = x_1 - y_1 \\ x + y = x_1 + y_1 \end{cases}$$

verstanden sind.

Über die Bestimmungskurve c ist dabei vorausgesetzt, daß sie von derartigen Geraden nur je einmal geschnitten wird. (Andernfalls wären die Werte $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ auf ihr nicht beliebig vorschreibbar.) Ist außer $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ zwischen α und β der Kurve c noch u selbst in α und β vorgeschrieben, so ist einfacher

$$(5) \quad 2u(x_1, y_1) = u_\alpha + u_\beta + \int_a^\beta \left(\frac{\partial u}{\partial x} dy + \frac{\partial u}{\partial y} dx \right).$$

2. Es sei jetzt die Gleichung gegeben

$$(6) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 0.$$

Ihre Lösung im Punkte x_1, y_1 ist bei vorgeschriebenen Werten $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ auf einer Kurve c und vorgeschriebenen Werten u_α und u_β :

$$(7) \quad 2u(x_1, y_1) = u_\alpha + u_\beta + \int_a^\beta \left(v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x} \right) dy + \left(v \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx,$$

worin v eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung ist, nämlich

$$v = I_0(iz) \text{ (vgl. S. 63), wo } z = \sqrt{(y - y_1)^2 - (x - x_1)^2}$$

$$v = 1 + \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{z^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots,$$

also $v = 1$ auf den 45° -Geraden.

Ist statt auf der Kurve c jetzt auf der Kurve $y = 0$ vorgeschrieben

$u = f(x)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = F(x)$, so wird

$$(8) \quad 2u(x_1, y_1) = f(x_1 - y_1) + f(x_1 + y_1) + y_1 \int_{x_1 - y_1}^{x_1 + y_1} \frac{1}{z} \frac{dv}{dz} f(x) dx \\ + \int_{x_1 - y_1}^{x_1 + y_1} v F(x) dx$$

mit

$$\frac{1}{z} \frac{dv}{dz} = \frac{1}{2} + \frac{z^2}{2^2 \cdot 4} + \frac{z^4}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6} + \dots$$

3. Es sei vorgelegt:

$$(9) \quad c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + 2b \frac{\partial U}{\partial t} \quad (\text{Telegraphengleichung}).$$

Wenn man setzt: $U = e^{\frac{bt}{a^2}} u$, so wird

$$c^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{b^2}{a^2} u$$

und setzt man ferner

$$x = \frac{ac}{b} X; \quad t = \frac{a^2}{b} Y,$$

so wird

$$(10) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + u = 0,$$

welche Gleichung nach (2) gelöst wird.

Literatur.

Horn: Gew. Differentialgleichungen und derselbe: Partielle Differentialgleichungen (Sammlung Schnbert, Bd. 50 u. 60). — *Vallée-Poussin*: s. S. 24, Bd. II. — *Jordan*: Cours d'analyse (Gauthier-Villars). — *Riemann-Weber*: s. S. 75. — *Courant-Hilbert*: s. S. 12, u. a.

Siebenter Abschnitt.

Lineare Integralgleichungen.

Integralgleichungen 1. Art.

Allgemeine Form:

$$(1) \quad f(s) = \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt,$$

wo f und K gegeben sind und φ die gesuchte Funktion ist¹⁾. K heißt der „Kern“ der Integralgleichung. Diese Integralgleichung ist im allgemeinen, d. h. für beliebige Kerne und stetige $f(s)$ nicht durch stetiges $\varphi(t)$ lösbar. Falls $f(s)$ entwickelbar ist in der Form: $f(s) = \sum_i c_i \varphi_i(s)$,

wo die φ_i Lösungen der Gleichung:

$$\varphi_i(s) = \lambda_i \int_a^b K(s, t) \varphi_i(t) dt,$$

also „Eigenlösungen“ sind (s. u.), dann folgt die formale Lösung:

$$\varphi(t) = \sum_i c_i \lambda_i \varphi_i(t).$$

Die Konvergenz dieser Reihe muß natürlich geprüft werden.

Ist $K(s, t)$ Greensche Funktion eines Differentialausdrucks $\Phi(D)$, (vgl. S. 111), so folgt unmittelbar:

$$\varphi(s) = \Phi(D) f(s).$$

Integralgleichungen 2. Art.

Allgemeine Form:

$$(2) \quad \varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt.$$

Diese Integralgleichung ist äquivalent dem Grenzfall $\lim n = \infty$ des folgenden Systems von linearen Gleichungen:

$$(3) \quad \begin{aligned} \varphi(\alpha_n) &= f(\alpha_n) + \lambda \sum_{r=1}^n K(\alpha_n, \alpha_r) \varphi(\alpha_r) (\alpha_{r+1} - \alpha_r); \\ \varphi &= 1, 2, \dots, n; \quad a = \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n = b. \end{aligned}$$

¹⁾ Die s und t bedeuten hier entweder gewöhnliche Variable, oder den Inbegriff der Variablen einer mehrdimensionalen Mannigfaltigkeit (Koordinaten eines Raumes, oder dgl.).

Bei dem Grenzübergang bleiben alle Eigenschaften des endlichen Systems erhalten. Es folgen hieraus viele Analogien zu den linearen Gleichungssystemen.

Fall 1. Die homogene Gleichung ($f(s) = 0$) besitze keine Lösung. Dann besitzt die inhomogene für jedes $f(s)$ eine und nur eine Lösung.

Fall 2. Die homogene Gleichung besitze eine oder mehrere linear unabhängige Lösungen $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. Dann besitzt auch die transponierte Gleichung:

$$(4) \quad \varphi(s) = \lambda \int_a^b K(t, s) \varphi(t) dt$$

ebensoviel Lösungen $\varphi_1', \dots, \varphi_n'$. Damit die inhomogene Gleichung lösbar wird, muß

$$(5) \quad \int f(t) \varphi_h'(t) dt = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

sein.

Eigenwerte und Eigenfunktionen.

Die homogene Gleichung

$$(6) \quad \varphi(s) = \lambda \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt \quad (\text{d. h. } f(s) = 0)$$

besitzt im allgemeinen keine Lösung außer für gewisse ausgezeichnete Werte des Parameters λ , die *Eigenwerte* des Kerns.

Die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ bilden eine diskrete nirgends im Endlichen sich häufende Zahlenmenge. Sie können reell oder komplex sein. Die zugehörigen Lösungen $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ heißen *Eigenfunktionen* des Kerns.

Zu einem Eigenwert gehören nur endlich viele voneinander unabhängige Eigenfunktionen (einfache und mehrfache Eigenwerte). Jede lineare Kombination von ihnen ist wieder eine Eigenfunktion. Sie lassen sich daher durch ein aus solchen Kombinationen gebildetes äquivalentes orthogonales System ersetzen.

Symmetrischer Kern.

$$K(s, t) = K(t, s) \quad (\text{Orthogonale Integralgleichungen}).$$

Bei symmetrischem reellen Kern liegen besonders einfache Verhältnisse vor:

1. Er besitzt immer Eigenwerte.
2. Alle Eigenwerte sind reell.
3. Zwei Eigenfunktionen zu verschiedenen Eigenwerten sind zu einander orthogonal, d. h. es ist:

$$(7) \quad \int \varphi_i(t) \varphi_k(t) dt = 0. \quad (i \neq k)$$

Sämtliche Eigenfunktionen des Kerns bilden daher ein orthogonales

System. Dazu gehört, daß der freibleibende Faktor der φ_i so normiert sei, daß

$$\int \varphi_i^2(t) dt = 1$$

wird.

Darstellung des symmetrischen Kerns durch Eigenwerte und Eigenfunktionen.

Es gilt die Bilinearformel:

$$(8) \quad K(s, t) = \sum_n \frac{\varphi_n(s) \varphi_n(t)}{\lambda_n},$$

wenn die (über *alle* Eigenfunktionen zu erstreckende) Summe gleichmäßig konvergiert.

Auflösung der inhomogenen Gleichung mit Hilfe der Bilinearformel.

Wenn $\lambda \neq \lambda_n$ ist, konvergiert auch

$$(9) \quad \sum_n \frac{\varphi_n(s) \varphi_n(t)}{\lambda_n - \lambda} = K(s, t).$$

$K(s, t)$ heißt „lösender Kern“. Er dient zur Lösung der inhomogenen Gleichung in der Form:

$$(10) \quad \varphi(s) = f(s) + \lambda \int K(s, t) f(t) dt = f(s) + \lambda \cdot \sum_n \frac{\varphi_n(s)}{\lambda_n - \lambda} \int \varphi_n(t) f(t) dt.$$

Ist $\lambda = \lambda_n$, so gilt die Formel nur, wenn

$$\int \varphi_n(t) f(t) dt = 0$$

ist.

Auflösung der inhomogenen Gleichung durch die Neumannsche Reihe.

$$(11) \quad \varphi(s) = f(s) + \lambda \int K(s, t) f(t) dt + \lambda^2 \iint K(s, t_1) K(t_1, t) f(t) dt_1 dt \\ + \lambda^3 \iiint K(s, t_2) K(t_2, t_1) K(t_1, t) f(t) dt_2 dt_1 dt + \dots$$

Die Größen

$$\int K(s, t_1) K(t_1, t) dt_1 = K_2(s, t)$$

$$\int K_2(s, t_1) K(t_1, t) dt_1 = K_3(s, t)$$

usw. heiße „iterierte“ Kerne. Es gilt

$$(12) \quad K_2(s, t) = \sum_n \frac{\varphi_n(s) \varphi_n(t)}{\lambda_n^2},$$

falls die Summe gleichmäßig konvergiert, ebenso

$$(12') \quad K_3(s, t) = \sum_n \frac{\varphi_n(s) \varphi_n(t)}{\lambda_n^3}$$

usw. Mit wachsender Iteration konvergieren die Bilinearformeln besser, bei stetigem Kern stets von K_1 ab.

Entwicklungssatz (Analogie zu *Fourierschen* Reihen).

Ist die Funktion $F(s)$ mit Hilfe einer anderen Funktion $G(s)$ darstellbar in der Form:

$$(13) \quad F(s) = \int K(s, t) G(t) dt,$$

so läßt sich $F(s)$ nach den Eigenfunktionen des Kerns entwickeln in einer gleichmäßig und absolut konvergenten Reihe:

$$(14) \quad F(s) = \sum_n c_n \varphi_n(s),$$

wo

$$c_n = \int F(t) \varphi_n(t) dt$$

ist. Dies folgt aus der Bilinearformel.

Literatur:

Courant-Hilbert: S. S. 12, Kap. III.

Achter Abschnitt.

Variationsrechnung.

Die Variationsrechnung stellt sich die Aufgabe, Funktionen x, y, z, \dots von t, u, v, \dots zu ermitteln, welche ein Integral

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \int_{u_1}^{u_2} \dots V(t, u, v, \dots, x, y, \dots, x_t, x_u, \dots) dt du \dots \quad \left(x_t = \frac{\partial x}{\partial t}, \dots \right)$$

zu einem Minimum oder Maximum machen. Dabei können die Grenzen fest oder auch variabel mit gewissen einschränkenden Bedingungen vorausgesetzt werden. Jedoch läßt sich der Fall variabler Grenzen auf den mit festen Grenzen zurückführen. Wir betrachten daher nur den Fall *fester* Grenzen. Die lösenden Funktionen unter den zur Konkurrenz zugelassenen Funktionen heißen *Extremalen*.

Verschiedene Formen der Integranden.

a) $V(x, \dot{x}, t)$ mit *einer* abhängigen Funktion $x(t)$ von *einer* unabhängigen t und deren Ableitung $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$. *Variieren* wir die Funktion $x(t)$, indem wir statt ihrer setzen

$$x(t) + \varepsilon \cdot \xi(t),$$

so wird die zugehörige Variation von S definiert durch:

$$\delta S = \varepsilon \cdot \frac{\partial S(x + \varepsilon \xi)}{\partial \varepsilon} = \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}} \dot{\xi} + \frac{\partial V}{\partial x} \xi \right) dt$$

oder durch partielle Integration des mit $\dot{\xi}$ behafteten Teils:

$$\delta S = \varepsilon \cdot \left[\frac{\partial V}{\partial \dot{x}} \xi \right]_{t_1}^{t_2} + \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} \xi \cdot \left[\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}} \right) \right] dt.$$

Ist $x(t)$ für t_1 und t_2 vorgeschrieben, also dort $\xi = 0$, so fällt der erste Teil fort. Die erste notwendige Bedingung für ein Extremum von S , daß $\delta S = 0$ ist für alle zulässigen Funktionen ξ , hat zur Folge, daß

$$(1) \quad \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}} \right) = 0$$

sein muß (*Euler-Lagrangesche Differentialgleichung*). Sie bestimmt $x(t)$ bis auf zwei Integrationskonstanten, welche durch die Randbedingungen festgelegt sein müssen.

b) $V(x, y, \dot{x}, \dot{y}, \dots, t)$ von mehreren (n) abhängigen Funktionen einer unabhängigen t . Hier wird $\delta S = 0$, wenn $x(t), y(t), \dots$ die Gleichungen

$$(2) \quad \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}} \right) = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{y}} \right) = 0, \dots$$

erfüllen. Das sind n Differentialgleichungen 2. Ordnung. Sie bestimmen $x(t), y(t), \dots$ bis auf $2n$ Integrationskonstanten, die durch die Randbedingungen festgelegt sein müssen.

c) $V(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, t)$ von einer abhängigen Funktion und ihren Ableitungen bis zur 3. Ordnung. Hier wird

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\xi \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{x}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial V}{\partial \ddot{x}} \right) + \dot{\xi} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \ddot{x}} \right) + \ddot{\xi} \frac{\partial V}{\partial \ddot{x}} \right] dt \\ + \int_{t_1}^{t_2} \xi \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{x}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial V}{\partial \ddot{x}} - \frac{d^3}{dt^3} \frac{\partial V}{\partial \ddot{x}} \right) dt.$$

δS wird also gleich Null, wenn außer $x(t)$ auch \dot{x} und \ddot{x} für t_1 und t_2 vorgeschrieben sind und die Gleichung

$$(3) \quad \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{x}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial V}{\partial \ddot{x}} - \frac{d^3}{dt^3} \frac{\partial V}{\partial \ddot{x}} = 0$$

erfüllt ist.

d) $V(t, u, \dots, x, y, \dots, x_i, x_u, \dots, y_i, y_u, \dots)$. Mehrere unabhängige: t, u, \dots , mehrere abhängige: x, y, \dots , und deren Ableitungen: x_i, y_i, \dots . δS wird gleich Null, wenn $x(t, u, \dots)$ usw. bestimmt werden aus den *Lagrangeschen* Gleichungen:

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial V}{\partial x_u} \right) - \dots = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial V}{\partial y_i} \right) - \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial V}{\partial y_u} \right) - \dots = 0 \end{cases}$$

usw.

Nebenbedingungen.

Sind zu dem Problem $\iint V dt du = \text{Extremum}$ noch Nebenbedingungen gegeben in der Form $\iint G dt du = \text{Const}$, $\iint H dt du = \text{Const}$, ..., so ist in den *Lagrangeschen* Gleichungen V durch $V + \lambda G + \mu H + \dots$ zu ersetzen. Die *Lagrangeschen* Faktoren λ, μ, \dots sind nachträglich aus den Rand- und Nebenbedingungen zu bestimmen.

$$1. \text{ Beispiel. } \int_0^1 \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 dt = \text{Extremum, Nebenbedingung } \int_0^1 x^2 dt = C,$$

Randbedingung $x(0) = x(1) = 0$. Die *Lagrangesche* Gleichung heißt für $V - \lambda G = \dot{x}^2 - \lambda x^2$ jetzt $\ddot{x} + \lambda x = 0$. Ihre Lösung ist

$$x = A \sin(\sqrt{\lambda} t + \alpha).$$

Aus der Randbedingung $x(0) = 0$ folgt $\alpha = 0$, aus $x(1) = 0$ folgt $\sqrt{\lambda} = n\pi$, d. h. λ kann nur die Werte $\lambda_n = n^2 \pi^2$ annehmen. A bestimmt sich aus der Nebenbedingung zu $\frac{A^2}{2} = C$, also ist die Lösung:

$$x = \pm \sqrt{2C} \sin(n\pi t), \quad \lambda_n = n^2 \pi^2.$$

2. Beispiel. $\iint \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \text{Extremum ohne Neben-}$

bedingungen hat die *Lagrangesche* Gleichung $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 = \Delta \varphi$.

Kommt noch die Nebenbedingung $\iint \varphi^2 dx dy = \text{Const}$ hinzu, so heißt die *Lagrangesche* Gleichung für $\varphi_x^2 + \varphi_y^2 - \lambda \varphi^2$ jetzt $\Delta \varphi + \lambda \varphi = 0$. Soll hierbei $\varphi = 0$ auf der Randkurve sein, so ist eine Lösung, ähnlich wie im ersten Beispiel, nur für gewisse diskrete Werte von λ möglich, nämlich für die „Eigenwerte“ λ_n , welche stets positiv $\lambda = k^2$ sind. Die zugehörigen Lösungen $\varphi(x, y)$, die „Eigenfunktionen“ $\varphi_n(x, y)$ erfüllen die Orthogonalitätsbedingungen

$$\iint \varphi_n \cdot \varphi_m dx dy = 0 \quad (n \neq m)$$

und mögen normiert sein durch

$$\iint \varphi_n^2 dx dy = 1$$

als Nebenbedingung. Die Lösung dieser Differentialgleichung ist also äquivalent der Lösung eines Variationsproblems. Oft ist letzteres, wenigstens näherungsweise, leichter zu lösen als ersteres, so daß man auf dem Umweg über ein Variationsproblem die Lösung von Differentialgleichungen erhält, z. B. durch die

Ritzsche Methode. Diese soll an dem obigen Beispiel 1 ausinandergesetzt werden. Vorgelegt ist also

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \lambda x = 0,$$

mit Randbedingung $x(0) = x(1) = 0$. Dies ist nach Beispiel 1 äquivalent mit

$$\int_0^1 \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 dt = \text{Extremum}, \quad \int_0^1 x^2 dt = C, \quad x(0) = x(1) = 0.$$

Wir nehmen eine Folge von später zu bestimmenden Funktionen $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ und Konstanten c_1, c_2, \dots, c_n und machen den Ansatz

$$x(t) = \sum_1^n c_p f_p(t).$$

Dadurch geht das Variationsproblem über in das neue Problem

$$\sum_1^n \sum_1^n c_p c_q A_{pq} = \text{Extremum}, \quad \sum_1^n \sum_1^n c_p c_q B_{pq} = C,$$

wobei

$$A_{pq} = \int_0^1 f_p'(t) f_q'(t) dt, \quad B_{pq} = \int_0^1 f_p(t) \cdot f_q(t) dt.$$

Die Lösung des neuen Problems (Bestimmung der c_p) erhält man aus dem linearen Gleichungssystem

$$\sum_p c_p (A_{pq} - l B_{pq}) = 0 \quad (q = 1, 2, \dots, n)$$

wo l ein später zu bestimmender *Lagrangescher* Faktor ist. Jetzt nehmen wir für f_1, f_2, \dots, f_n speziell die Funktionen

$$f_1 = C_1, \quad f_2 = C_2 + C_2' x, \quad f_3 = C_3 + C_3' x + C_3'' x^2, \dots$$

und verlangen, daß jede dieser Funktionen f_p für sich die Randbedingungen $x(0) = x(1) = 0$ erfüllen sollen. Daraus folgt zunächst

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = 0, \dots$$

und

$$C_2' = 0, \quad C_3' + C_3'' = 0, \dots$$

also

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = C_3' x + C_3'' x^2 \text{ bei } C_3' + C_3'' = 0, \text{ usw.}$$

Wir fügen noch die Orthogonalitäts- und Normierungsbedingungen hinzu:

$$\int_0^1 f_p(t) f_q(t) dt = 0 \text{ für } p \neq q.$$

$$\int_0^1 f_p^2(t) dt = B_{pp} = 1, \text{ falls nicht } f_p(t) = 0.$$

Daraus folgt

$$f_3 = t(1-t)\sqrt{30}, \quad f_3' = \sqrt{30}(1-2t) \text{ usw.}$$

Begnügen wir uns mit *drei* Gliedern, also

$$x(t) = \sum_1^3 c_p f_p(t) = c_3 f_3(t) = c_3 \sqrt{30} t(1-t),$$

so wird das lineare Gleichungssystem

$$c_3 (l - A_{33}) = 0, \quad \text{also } l = A_{33}.$$

$$l = \int_0^1 f_3'^2 dt = 30 \int_0^1 (1-4t+4t^2) dt = 10.$$

Da

$$0 = A_{11} = A_{12} = A_{13} = A_{21} = A_{22} = B_{11} = B_{12} = B_{13} = B_{21} = B_{22} = 0,$$

folgt aus der Nebenbedingung noch

$$C = \int_0^1 x^2 dt = c_3^2 \int_0^1 f_3^2(t) dt = c_3^2 \cdot 1,$$

also $c_3 = \pm \sqrt{C}$ und schließlich

$$x = \pm \sqrt{2C} \cdot t(1-t) \sqrt{15}, \quad l = 10,$$

statt der genauen in Beispiel 1 ermittelten Funktion:

$$x = \pm \sqrt{2C} \cdot \sin(\pi t), \quad l_1 = \pi^2.$$

Benutzt man statt nur der *einen* nicht verschwindenden Funktion $f_3(t)$ auch noch $f_4(t)$, so wird das lineare Gleichungssystem auf 2 Gleichungen reduziert und man erhält 2 Lösungen $l_1^{(2)}$ und $l_2^{(2)}$, welche nahe bei $\lambda_1 = \pi^2$, $\lambda_2 = (2\pi)^2$ liegen, wobei $l_1^{(2)}$ noch näher an π^2 liegt als obiges $l = l_1^{(1)} = 10$. x wird dann durch eine Kurve 3. Grades noch besser an $\sqrt{2C} \sin \pi t$ und $\sqrt{2C} \sin 2\pi t$ approximiert als in obiger erster Näherung.

Äquivalenz von Variationsproblemen mit Integralgleichungen.

$\iint K(x, y) \varphi(x) \varphi(y) dx dy = \text{Extremum}, \int \varphi^2(t) dt = 1, \varphi = 0$ am Rand hat dieselben Eigenwerte λ und Lösungen $\varphi(t)$ als Eigenfunktionen wie die homogene Integralgleichung

$$\varphi(x) - \lambda \iint K(x, y) \varphi(y) dy = 0.$$

Literatur:

Courant-Hilbert: S. S. 12, Kap. IV u. a.

Neunter Abschnitt.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

A. Grundbegriffe.

1. Wenn unter gewissen Bedingungen ein Ereignis unter einer Auswahl von N Ereignissen a_1, a_2, \dots, a_N eintreten muß, und kein Grund vorliegt, warum irgendeins derselben leichter eintreten sollte als ein anderes, so heißt der Bruch $\frac{1}{N}$ die „Wahrscheinlichkeit“ für das Eintreten eines jeden dieser Ereignisse.

Die Beobachtung eines solchen Ereignisses heißt eine „Probe“.

2. Bezeichnet man als „günstiges Ereignis“ das Eintreten eines beliebigen Ereignisses aus einer bestimmten Gruppe der a , bestehend aus n ($n \leq N$) Elementen, so heißt der Bruch $p = \frac{n}{N}$ die „Wahrscheinlichkeit“ für das Eintreten dieses „günstigen Ereignisses“.

3. Sind mehrere solcher Gruppen gegeben, die sich gegenseitig ausschließen, so daß also kein a in mehr als einer Gruppe vorkommt, so ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten irgendeines beliebigen Ereignisses aus irgendeiner der gegebenen Gruppen gleich der Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten

$$W \text{ (entweder — oder — oder)} = p_1 + p_2 + p_3 + \dots$$

Enthalten die Gruppen zusammen alle möglichen Ereignisse a_1, a_2, \dots, a_N , so ist $\sum p_i = 1$.

4. Sind a_1', a_2', \dots, a_n' Ereignisse, die wie die a charakterisiert und von diesen unabhängig sind, und ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines bestimmten Ereignisses a_0' gleich p_0' , so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sowohl das Ereignis a_0 als auch das Ereignis a_0' eintritt, gleich dem Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten

$$W \text{ (sowohl } a_0 \text{ als auch } a_0') = p_0 \cdot p_0'$$

allgemein:

$$W \text{ (sowohl — als auch — als auch...)} = p^{(1)} \cdot p^{(2)} \cdot p^{(3)} \dots$$

Die zweite Probe kann dabei eine Wiederholung der ersten unter denselben äußeren Bedingungen zu einer anderen Zeit sein, oder

auch in einem verschiedenen Vorgang zu gleicher oder anderer Zeit bestehen.

5. Wenn bei N unabhängigen Proben 1, 2, ..., N die Wahrscheinlichkeit für das Einsetzen eines günstigen Ereignisses jedesmal gleich p ist, und fallen von den N Proben in Wirklichkeit n günstig aus, so wird $\left| \frac{n}{N} - p \right|$ mit wachsendem N beliebig klein. Für die Wahrscheinlichkeit $W(n)$, daß bei diesen N Proben n mal ein günstiges Ereignis eintritt, gilt die „*Newtonsche Formel*“:

$$(1) \quad W(n) = \binom{N}{n} p^n \cdot q^{N-n},$$

wo $q = 1 - p$ bedeutet.

Für den Grenzfall sehr großer N geht diese Formel über in

$$(2) \quad W(n) = \frac{e^{-z} z^n}{\sqrt{2\pi N p q}}; \quad \text{worin } z = \frac{n - Np}{\sqrt{2N p q}} \quad (\text{Laplace}).$$

Ist N auch sehr groß gegen Np , so wird

$$(3) \quad W(n) = \frac{e^{-Np} (Np)^n}{n!} \quad (\text{Poisson}).$$

6. Wiederholt man die Serie von N Proben, so wird sich jedesmal ein anderes n ergeben. Der Mittelwert \bar{n} wird im Grenzfall unendlichfacher Wiederholung der Serie $\bar{n} = N \cdot p$ (*Bernoulli*).

B. Schwankungen.

1. Man bezeichnet die Größen

$$s = n - \bar{n}, \quad \delta = \frac{n - \bar{n}}{\bar{n}}$$

als absolute bzw. relative *Schwankung*. Die „durchschnittliche absolute Schwankung“ ist

$$(1) \quad |\bar{s}| = 2 W(v) \cdot \left(\bar{n} - \frac{v\bar{n}}{N} \right),$$

worin v die größte ganze Zahl $\leq \bar{n}$ ist und $W(v)$ die Wahrscheinlichkeit ist, daß bei N Proben v mal das Ereignis a eintritt; die „durchschnittliche relative Schwankung“ wird daher

$$(2) \quad |\bar{\delta}| = \frac{|\bar{s}|}{\bar{n}} = 2 W(v) \cdot \left(1 - \frac{v}{N} \right).$$

Die „mittlere absolute Schwankung“ $\sqrt{s^2}$ wird gegeben durch

$$(3) \quad \bar{s^2} = N p q = \bar{n} q,$$

die „mittlere relative Schwankung“ $\sqrt{\bar{\delta^2}}$ daher

$$(4) \quad \bar{\delta^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{N} = \frac{q}{n}$$

2. Die durchschnittliche Abweichung der verschiedenen Werte n von einem bestimmt vorgegebenen n_1 ist

$$(5) \quad |\overline{n_1 - n}| = n_1 - \bar{n}.$$

Die „mittlere Abweichung“ zweier aufeinander folgender Proben ist gegeben durch

$$(6) \quad \overline{(n_i - n_k)^2} = 2s^2 = 2\bar{n}^2\bar{\delta^2} = 2\bar{n}q.$$

3. Ist $p \ll 1$, $N \gg 1$, $p \cdot N = \bar{n}$ endlich, so gilt die *Poissonsche Formel*:

$$(7) \quad W(n) = \frac{e^{-\bar{n}} \cdot \bar{n}^n}{n!}.$$

In diesem Falle ist die mittlere absolute bzw. relative Schwankung bestimmt durch

$$(8) \quad \begin{aligned} \bar{s^2} &= \bar{n} \\ \bar{\delta^2} &= \frac{1}{\bar{n}}. \end{aligned}$$

4. Sowohl N als auch \bar{n} seien so groß, daß man δ als kontinuierlich veränderlich ansehen kann, ohne daß $p \ll 1$ ist. Dann gilt das *Gaußsche Fehlergesetz*: Es ist die Wahrscheinlichkeit, daß für δ ein Wert zwischen δ und $\delta + d\delta$ gefunden wird

$$(9) \quad W(\delta) d\delta = \sqrt{\frac{\bar{n}}{2\pi q}} \cdot e^{-\frac{\bar{n}}{2q} \delta^2} d\delta.$$

In diesem Falle ist die durchschnittliche Schwankung:

$$(10) \quad |\bar{\delta}| = 2 \int_0^{\infty} \delta \cdot W(\delta) d\delta = \sqrt{\frac{2 \cdot q}{\pi \bar{n}}};$$

und die mittlere Schwankung $\sqrt{\bar{\delta^2}}$ bestimmt durch:

$$(11) \quad \bar{\delta^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^2 \cdot W(\delta) d\delta = \frac{q}{\bar{n}}.$$

Das Fehlergesetz läßt sich also auch schreiben:

$$W(\delta) d\delta = \frac{1}{\sqrt{2\pi \bar{\delta^2}}} \cdot e^{-\frac{\delta^2}{2\bar{\delta^2}}} \cdot d\delta.$$

Es wird ferner der Quotient

$$(12) \quad \frac{|\bar{\delta}|}{\sqrt{\bar{\delta}^2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}};$$

für das Verhältnis der „absoluten“ Schwankungen gilt dasselbe.

5. Ist außerdem $p \ll 1$, so ist in den Formeln überall $q = 1$ zu setzen. Speziell wird dann

$$(13) \quad |\bar{\delta}| = \sqrt{\frac{2}{\pi n}}$$

$$\bar{\delta}^2 = \frac{1}{n}.$$

Zeigt sich bei Versuchen, Statistiken usw., daß tatsächlich $\bar{s}^2 = \bar{n}$ ist, so sagt man: es liegt „normale Dispersion“ vor,

ist $\bar{s}^2 > \bar{n}$, so hat man „übernormale“,

ist $\bar{s}^2 < \bar{n}$, so hat man „unternormale“ Dispersion.

Die Ursachen für solche Abweichungen liegen in der nicht erfüllten Unabhängigkeit der Proben.

C. Mittelwertbildung.

Ist die Wahrscheinlichkeit $W(n)$ eines durch $f(n)$ charakterisierten Zustandes bekannt, so ist der Mittelwert

$$(1) \quad \bar{f}(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(n) W(n) dn.$$

Der Mittelwert der Funktion in einem bestimmten Intervall $a < n < b$ ist:

$$(2) \quad \bar{f}(n) = \frac{\int_a^b f(n) W(n) dn}{\int_a^b W(n) dn}.$$

D. Wahrscheinlichkeitsnachwirkung.

Folgen Serien von Proben im Zeitabstand τ aufeinander, so sind in vielen praktischen Fällen die Zahlen n der günstig ausfallenden Proben in einer Serie nicht unabhängig von dem Ausfall der Proben der vorhergehenden Serie.

Besonders einfach und wichtig ist der Fall:

$$(1) \quad N \gg 1; \quad p \ll 1; \quad pN = n \text{ endlich.}$$

Dann wird:

$$(2) \quad \overline{n_i - n_{i+1}} = P(n_i - n) \quad \text{und} \quad \overline{(n_i - n_{i+1})^2} = 2Pn.$$

Hierbei bedeuten n_i und n_{i+1} die n für zwei einander folgende Serien und P eine Konstante < 1 , die von den Bedingungen des Versuches und dem Zeitabstand τ der Serien abhängt, und mit steigendem τ bis 1 anwächst.

Alle anderen Schwankungsformeln bleiben ungeändert.

Literatur:

Markoff: Wahrscheinlichkeitsrechnung (Leipzig: B. G. Teubner). — *Poincaré*: Calcul de probabilité (Gauthier-Villars). — *Fürth*: Schwankungserscheinungen. — *Lorentz*: Theorie statistiques (Leipzig: B. G. Teubner). — *Csuber, W. R.*: Wahrscheinlichkeitsrechnung (Leipzig: B. G. Teubner). — *Planck*: Wärmestrahlung (Leipzig: J. A. Barth) u. a.

Zehnter Abschnitt.

Vektoranalysis.

A. Koordinatenfreie Formulierung der Vektoranalysis.

1. Definitionen.

Die Vektoranalysis beschäftigt sich mit Skalaren, Vektoren und Tensoren.

1. Ein *Skalar* ist eine Funktion des Ortes, die jedem Punkt einen Betrag (Zahl) zuordnet.

2. Ein *Vektor* ist eine Funktion des Ortes, die jedem Punkt einen Betrag und eine Richtung zuordnet.

3. Ein *Tensor* (2. Grades) ist eine Funktion des Ortes, die jedem Vektor in einem Punkte daselbst einen andern Vektor zuordnet. Ein Tensor höheren Grades ordnet ebenso jedem Vektor einen Tensor nächstniedern Grades zu.

Diese Funktionen können neben ihrer Abhängigkeit vom Ort noch andere Parameter, wie z. B. die Zeit, enthalten.

Sind die Funktionen für jeden Punkt des Raumes definiert, so spricht man von *Skalarfeldern*, *Vektorfeldern*, *Tensorfeldern* bzw. *Feldvektoren* usw.

Sind die Funktionen nur in Punkten, Linien, Flächen definiert, so hat man *Punkt*-, *Linien*-, *Flächenvektoren* usw.

Sind die Funktionen vom Ort unabhängig, so werden die Skalare, Vektoren, Tensoren im folgenden als „frei“ bezeichnet.

Ein in einem Punkte definierter Vektor kann in einen anderen unter Erhaltung von Betrag und Richtung *verpflanzt* werden. Analoges gilt für Tensoren.

Vektoren, deren Betrag überall $= 1$ ist, heißen *Einheitsvektoren*. Der Betrag eines Vektors ist ein Skalar.

Bezeichnung: Im folgenden sind meistens bezeichnet:

Skalare durch griechische Buchstaben, z. B. φ ,

Vektoren durch deutsche Buchstaben, z. B. a ,

Einheitsvektoren durch den Index $_1$, z. B. a_1 ,

Tensoren durch große deutsche Buchstaben, z. B. \mathfrak{E} .

Der Betrag eines Vektors a wird durch den gleichlautenden lateinischen Buchstaben a bezeichnet. Auch die Bezeichnungsweise $|a|$ ist gebräuchlich.

2. Vektoralgebra.

Unter der *Summe zweier Vektoren* a und b versteht man den Vektor

$$c = a + b,$$

dessen Richtung und Betrag an jeder Stelle von den Summanden in derselben Weise abhängt, wie die Diagonale eines Parallelogramms von den Seiten, die mit ihr von derselben Ecke auslaufen. Hiernach gilt für die Summation von Vektoren das *kommutative* Gesetz:

$$(1) \quad a + b = b + a,$$

sowie das *assoziative* Gesetz:

$$(2) \quad (a + b) + c = a + (b + c).$$

Der Begriff der Subtraktion folgt durch Umkehrung

$$(3) \quad a = c - b; \quad b = c - a.$$

Unter dem *Produkt* $a\varphi$ eines Vektors a und eines Skalars φ versteht man den Vektor mit dem Betrage $a\varphi$ und der Richtung von a . Es ist also $a = a\alpha_1$.

Als *Produkt zweier Vektoren* a und b bezeichnet man zwei verschiedene Größen:

a) das *innere Produkt* (auch skalares Produkt genannt). Dies ist ein Skalar, dessen Betrag

$$(4) \quad (a \cdot b) = a \cdot b \cdot \cos \varphi$$

ist, d. h. gleich dem Produkt der Beträge der Vektoren a und b , multipliziert mit dem Kosinus des Winkels zwischen ihren Richtungen. Daher ist $(a \cdot b) = (b \cdot a)$ (kommutatives Gesetz);

b) das *äußere Produkt* (auch Vektorprodukt genannt) $[a \cdot b]$. Dies ist ein Vektor, dessen Richtung senkrecht steht auf der durch a und b gelegten Ebene und dessen Betrag gleich

$$(5) \quad |[a, b]| = a \cdot b \cdot \sin \varphi$$

ist. Der Richtungssinn ergibt sich durch die Festsetzung, daß die Richtungen a , b , $[a \cdot b]$ hintereinander gesetzt eine Rechtsschraube bilden.

Daher ist

$$(6) \quad [a \cdot b] = -[b \cdot a].$$

Es gelten folgende Regeln:

$$(7) \quad [a \cdot a] = 0; \quad (a [a \cdot b]) = 0.$$

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a \cdot b) + (a \cdot c) = (a \cdot (b + c)) \\ [a \cdot b] + [a \cdot c] = [a \cdot (b + c)] \end{array} \right\} \text{ distributives Gesetz.}$$

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a [b \cdot c]) = (b [c \cdot a]) = (c [a \cdot b]) \\ [a [b \cdot c]] = b(a \cdot c) - c(a \cdot b) \\ ([a \cdot b] [c \cdot b]) = (c [b [a \cdot b]]) = (a \cdot c)(b \cdot b) - (b \cdot c)(a \cdot b). \end{array} \right.$$

Es ist ferner

$$(10) \quad (a[b c])(e[f g]) = \begin{vmatrix} (ae)(af)(ag) \\ (be)(bf)(bg) \\ (ce)(cf)(cg) \end{vmatrix}$$

und daraus

$$(a[b c])^2 = a^2 b^2 c^2 - a^2 (b c)^2 - b^2 (a c)^2 - c^2 (a b)^2 + 2(a b)(b c)(a c).$$

Der Betrag eines Vektors a ist

$$(11) \quad a = \sqrt{(aa)}.$$

Er ist immer positiv zu rechnen.

3. Integral- und Differentialausdrücke.

a) Skalare Integrale.

Als *Linienintegral* eines Vektors längs einer Kurve bezeichnet man die Größe

$$\int (a d\mathfrak{s}) = \int (a \mathfrak{s}_1) ds,$$

wo \mathfrak{s}_1 ein Einheitsvektor ist, dessen Richtung gleich der des Kurvenelementes $d\mathfrak{s}$ ist. $(a \mathfrak{s}_1)$ wird auch in der Form a_s geschrieben, also das Linienintegral $\int a_s ds$.

Als *Flächenintegral* bezeichnet man die Größe

$$\int (a n_1) df,$$

wo n_1 ein Einheitsvektor ist, dessen Richtung senkrecht zu dem Flächenelement df steht. Statt $(a n_1)$ schreibt man auch a_n , also für das Flächenintegral $\int a_n df$.

b) Abgeleitete Vektoren und Skalare.

Der Differentialquotient $\frac{d\varphi}{ds}$ eines Skalars φ längs einer Geraden ist im allgemeinen eine Funktion der Richtung der Geraden und erreicht einen Maximalwert für eine bestimmte Richtung derselben.

$\text{grad } \varphi$ ist ein Vektor, dessen Betrag gleich dem Maximalwert von $\frac{d\varphi}{ds}$ ist und dessen Richtung in die dazu gehörige Richtung fällt.

Daher gilt:

$$d\varphi = (d\mathfrak{s} \text{ grad } \varphi).$$

Läßt man in dem Ausdruck $\frac{\int a_n df}{V}$, wo das Integral über eine geschlossene Fläche um das Volumen V erstreckt ist, V zur Grenze 0 übergehen, so bezeichnet man den Grenzwert als $\text{div } a$.

$\text{div } a$ ist ein Skalar.

Läßt man in dem Ausdruck $\frac{\int a_n ds}{F}$, wo das Integral über eine geschlossene Kurve vom Inhalt F erstreckt ist, F zur Grenze 0 übergehen, so wird der Wert eine Funktion der Richtung der Normalen von F .

rot α ist ein Vektor, dessen Betrag gleich dem *Maximum* unter allen bei verschiedenen Richtungen von F auftretenden Grenzwerten ist und dessen Richtung senkrecht auf der zugehörigen Lage von F steht, so, daß der Umlaufsinn $\int ds$ und rot α eine Rechtsschraube bilden. Aus diesen Definitionen ergeben sich folgende Sätze:

c) Integralsätze.

Gaußscher Satz:

$$(1) \quad \int df a_n = \int dv \operatorname{div} \alpha.$$

Das erste Integral ist über eine geschlossene Fläche, das zweite über das von ihr umschlossene Volumen zu erstrecken. Der Vektor α_n in $a_n = (\alpha_n)$ ist nach außen gerichtet.

Stokesscher Satz:

$$(2) \quad \int ds a_s = \int df \operatorname{rot}_n \alpha, \quad [\operatorname{rot}_n \alpha = (\alpha_n \operatorname{rot} \alpha)].$$

Das erste Integral ist über eine geschlossene Kurve, das zweite über *irgendeine* durch die Kurve umschlossene Fläche zu erstrecken.

Greenscher Satz: Wendet man den *Gaußschen* Satz auf den Vektor $\psi \operatorname{grad} \varphi$ an, so erhält man

$$(3) \quad \int df \psi \operatorname{grad}_n \varphi = \int dv [\psi \Delta \varphi + (\operatorname{grad} \psi \operatorname{grad} \varphi)]. \quad (\text{Greenscher Satz.})$$

(Betreffs der Bedeutung des Symbols $\Delta \varphi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi$ vgl. S. 156.)

Hieraus folgt die weitere nützliche Formel:

$$(4) \quad \int df (\psi \operatorname{grad}_n \varphi - \varphi \operatorname{grad}_n \psi) = \int dv (\psi \Delta \varphi - \varphi \Delta \psi).$$

Folgende *Spezialfälle* sind von Bedeutung:

$$1. \quad \psi = 1.$$

$$(5) \quad \int df \operatorname{grad}_n \varphi = \int dv \Delta \varphi.$$

2. $\psi = \frac{1}{r}$. Dann ist $\Delta \psi = 0$, außer für $r = 0$. Man erhält:

$$(6) \quad \int df \left(\frac{1}{r} \operatorname{grad}_n \varphi - \varphi \operatorname{grad}_n \frac{1}{r} \right) = \int dv \left(\frac{1}{r} \Delta \varphi \right) - \int dv \left(\varphi \Delta \frac{1}{r} \right).$$

Das letzte Integral ist $= 0$, wenn die begrenzende Fläche den Punkt $r = 0$ ausschließt. Umfaßt sie ihn, so wird

$$(7) \quad \int dv \left(\varphi \Delta \frac{1}{r} \right) = -4\pi \varphi_0.$$

wo φ_0 den Wert von φ im Nullpunkt bedeutet. Man erhält also, wenn die Fläche den Nullpunkt umschließt,

$$(8) \quad 4\pi\varphi_0 = - \int dv \frac{\Delta\varphi}{r} + \int df \left(\frac{1}{r} \operatorname{grad}_n \varphi - \varphi \operatorname{grad}_n \frac{1}{r} \right).$$

2a. $\varphi = 1$ ergibt:

$$(9) \quad \int dv \Delta \left(\frac{1}{r} \right) - \int df \operatorname{grad}_n \left(\frac{1}{r} \right) = 0 \text{ bzw. } = -4\pi,$$

je nachdem das Volumen und die Fläche den Nullpunkt ausschließt oder einschließt.

3. $\psi = \frac{e^{ikr}}{r}$, dann ist $\Delta\psi = -k^2\psi$ außer für $r=0$. Gilt für φ überall die Gleichung $\Delta\varphi + k^2\varphi = 0$, so wird

$$\int df \left(\frac{e^{ikr}}{r} \operatorname{grad}_n \varphi - \varphi \operatorname{grad}_n \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right) = 4\pi\varphi_0 \text{ bzw. } = 0,$$

je nachdem der Punkt $r=0$ von der Fläche umschlossen wird oder nicht.

d) Vektorielle Integrale.

Im Gegensatz zu der ungerichteten Größe $\int a_s ds$ kann man auch $\int \mathbf{a} ds$ bilden.

Unter $\int \mathbf{a} ds$ versteht man den Vektor, der durch Summation der Vektordifferentiale $\mathbf{a} ds$ längs einer Kurve entsteht (nachdem sie alle durch Parallelverschiebung in einem Punkt vereinigt sind). Analog bildet man $\int \mathbf{a} df$ und $\int \mathbf{a} dv$. Diese Vektoren sind keinem bestimmten Orte zugeordnet, also freie Vektoren.

Es gilt für eine geschlossene Fläche

$$(10) \quad \int dv \operatorname{grad} \varphi = - \int df \varphi \mathbf{n}_1$$

und für eine geschlossene Kurve

$$(11) \quad \int d\mathbf{s} \varphi = \int ds \varphi \mathbf{s}_1 = - \int df [\operatorname{grad} \varphi, \mathbf{n}_1].$$

4. Allgemeine Formeln.

Es gilt allgemein:

$$(1) \quad \operatorname{rot} (\operatorname{grad} \varphi) = 0$$

$$(2) \quad \operatorname{div} (\operatorname{rot} \mathbf{a}) = 0$$

ferner:

$$(3) \quad \operatorname{div} (\varphi \mathbf{a}) = \varphi \operatorname{div} \mathbf{a} + (\mathbf{a} \operatorname{grad} \varphi)$$

$$(4) \quad \operatorname{rot} (\varphi \mathbf{a}) = \varphi \operatorname{rot} \mathbf{a} - [\mathbf{a} \operatorname{grad} \varphi]$$

$$(5) \quad \operatorname{div} [\mathbf{a} \mathbf{b}] = \mathbf{b} \operatorname{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{b}.$$

Die Größe $\operatorname{div} (\operatorname{grad} \varphi)$ wird mit $\Delta\varphi$ bezeichnet.

Es lassen sich schließlich noch folgende nützliche Vektoren ableiten:

$$(6) \quad \Delta a = \text{grad}(\text{div } a) - \text{rot}(\text{rot } a)$$

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} (\text{grad } a) \cdot b &= \frac{1}{2}(\text{rot}[a \times b] + \text{grad}(a \cdot b) - a \cdot \text{div } b + b \cdot \text{div } a \\ &\quad - [a \cdot \text{rot } b] - [b \cdot \text{rot } a]). \end{aligned} \right.$$

Dieser Vektor $(\text{grad } a) \cdot b$ ¹⁾ gibt den Zuwachs an, den der Vektor a erfährt, wenn man in einem Feld um die durch b angezeigte Strecke fortschreitet. Hieraus folgt

$$(8) \quad \text{rot}[a \times b] = (\text{grad } a) \cdot b - (a \cdot \text{grad}) b + a \cdot \text{div } b - b \cdot \text{div } a$$

$$(9) \quad \text{grad}(a \cdot b) = (a \cdot \text{grad}) b + (b \cdot \text{grad}) a + [a \cdot \text{rot } b] + [b \cdot \text{rot } a].$$

5. Bemerkung zu den Symbolen.

Die Bezeichnungen in der Vektoranalysis stehen nicht fest. Man findet z. B. auch folgende Symbole:

$$\begin{aligned} a \cdot b &\text{ für } (a \cdot b) \\ a \times b &\text{ " } [a \times b] \\ a \cdot b \cdot c &\text{ " } (a \cdot [b \times c]) \\ \nabla \varphi &\text{ " grad } \varphi \\ \nabla a &\text{ " div } a \\ [\nabla a] &\text{ " rot } a = \text{curl } a \\ \nabla^2 \varphi &\text{ " } \Delta \varphi \\ (a \cdot \nabla) b &\text{ " } (a \cdot \text{grad}) b. \end{aligned}$$

Außerdem wird (z. B. bei *Runge*, Vektoranalysis) der Begriff der Plangröße $a \cdot b$ gebraucht, d. h. einer Größe, welche die Fläche des Parallelogramms über a und b bedeutet. Der Vektor $[a \times b]$ bzw. $a \times b$ heißt die „Ergänzung“ zu dieser Plangröße $a \cdot b$, geschrieben $a \times b = |a \cdot b|$ und umgekehrt $a \cdot b = |(a \times b)|$. Ferner

$$\begin{aligned} a \cdot b &= a |b| \\ \text{div } a &= a | \nabla \\ \text{rot } a &= \nabla \times a \\ \Delta \varphi &= (\nabla | \nabla) \varphi. \end{aligned}$$

Der Operator ∇ (Nabla) kann hierbei formal wie ein Vektor behandelt werden. Der Vorteil dieser Modifikationen liegt unter anderem in der größeren Symmetrie der mit ihrer Benutzung geschriebenen Formeln.

¹⁾ Für $(\text{grad } a) \cdot b$ wird auch $(b \cdot \nabla) a$ geschrieben. Das Symbol ∇ wird „Nabla“ gelesen.

6. Spezielle Vektorfelder.

1. Ein Vektorfeld α , in dem $\operatorname{rot} \alpha$ überall verschwindet, heißt ein „wirbelfreies Feld“.

Ein wirbelfreier Vektor α ist darstellbar als negativer Gradient eines Skalars φ ,

$$\alpha = -\operatorname{grad} \varphi,$$

welcher „Potential“ oder auch „skalares Potential“ genannt wird. Es gilt dann

$$(1) \quad \int_1^2 \alpha_s ds = \varphi_1 - \varphi_2.$$

Der Wert des Integrals ist nur abhängig von den Grenzen, unabhängig vom Integrationsweg und verschwindet für einen geschlossenen Integrationsweg. Umgekehrt kann man auch sagen: Das Feld des Gradienten eines Skalars ist stets ein wirbelfreies.

Setzt man

$$(2) \quad \operatorname{div} \alpha = -\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\Delta \varphi = 4\pi \varrho,$$

so wird $\varphi = \int \frac{dv \varrho}{r}$, wo r die Entfernung des Volumendifferentials vom Aufpunkt, in dem φ berechnet werden soll, angibt. Ist also $\operatorname{div} \alpha$ überall gegeben und $\operatorname{rot} \alpha = 0$, so gestattet diese Formel die Berechnung von φ , also auch die von α selbst.

2. Ein Vektorfeld α , in dem $\operatorname{div} \alpha$ überall verschwindet, heißt ein „quellenfreies Feld“. Ein quellenfreier Vektor α ist darstellbar als rot eines quellenfreien Vektors \mathfrak{A} :

$$(3) \quad \alpha = \operatorname{rot} \mathfrak{A}, \quad \operatorname{div} \mathfrak{A} = 0,$$

welcher „Vektorpotential“ genannt wird.

Setzt man

$$(4) \quad \operatorname{rot} \alpha = \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathfrak{A}) = -\Delta \mathfrak{A} = 4\pi c,$$

so wird

$$(5) \quad \mathfrak{A} = \int \frac{dv c}{r}.$$

Ist also $\operatorname{rot} \alpha$ überall gegeben und $\operatorname{div} \alpha = 0$, so gestattet diese Formel die Berechnung von \mathfrak{A} , also auch die von α selbst.

Jedes Vektorfeld läßt sich eindeutig als Summe (Superposition) eines wirbelfreien und eines quellenfreien Feldes darstellen.

$$(6) \quad \alpha = \alpha' + \alpha'',$$

wo $\operatorname{rot} \alpha' = 0$; $\operatorname{div} \alpha'' = 0$.

$$(7) \quad \alpha' = -\operatorname{grad} \int \frac{dv \operatorname{div} \alpha}{4\pi r}; \quad \alpha'' = \operatorname{rot} \int \frac{dv \operatorname{rot} \alpha}{4\pi r},$$

wobei die durch die Symbole vorgeschriebenen Operationen *unter* dem Integral an der Stelle des Volumendifferentials dv , die Operationen *vor* dem Integral an der Stelle des zu bestimmenden Vektors \mathbf{a}' bzw. \mathbf{a}'' vorzunehmen sind.

7. Der Vektor \mathbf{r} .

Ein wichtiger Vektor ist der Ortsvektor \mathbf{r} , welcher die Lage eines Punktes in bezug auf einen festen Punkt $\mathbf{r} = 0$ darstellt. Er bildet ein Vektorfeld, indem jedem Punkte des Raumes ein Vektor \mathbf{r} zugeordnet werden kann, dessen Richtung vom Nullpunkt zu dem Aufpunkt zeigt und dessen Betrag die Entfernung vom Nullpunkt ist.

Für den Ortsvektor \mathbf{r} gelten eine Reihe von besonderen Relationen. Es ist (wo \mathbf{a} und \mathbf{b} freie Vektoren seien):

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} \mathbf{r} = 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{r} = 3 \\ \operatorname{grad}(\mathbf{r} \mathbf{a}) = \mathbf{a} \\ \operatorname{rot}[\mathbf{r} \mathbf{a}] = -2\mathbf{a} \\ \operatorname{div}[\mathbf{r} \mathbf{a}] = 0 \\ \operatorname{rot}(\mathbf{b}(\mathbf{r} \mathbf{a})) = [\mathbf{a} \mathbf{b}] \\ \operatorname{div}(\mathbf{b}(\mathbf{r} \mathbf{a})) = (\mathbf{a} \mathbf{b}) \end{array} \right.$$

$$\operatorname{grad} r = \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \text{wo } r = |\mathbf{r}| \quad \operatorname{grad} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{r} \mathbf{a}) = \frac{(\mathbf{r} \mathbf{a})}{r} \qquad (\mathbf{a} \operatorname{grad} r) = \frac{(\mathbf{a} \mathbf{r})}{r}$$

$$(\mathbf{a} \operatorname{grad} r) = \mathbf{a}$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{r} \mathbf{a}) = \frac{[\mathbf{r} \mathbf{a}]}{r}$$

$$\operatorname{grad} \frac{(\mathbf{a} \mathbf{r})}{r^3} = \frac{\mathbf{a}}{r^3} - \frac{\mathbf{r}(\mathbf{a} \mathbf{r})}{r^{3+2}}$$

$$\operatorname{rot} \frac{[\mathbf{a} \mathbf{r}]}{r^3} = \frac{(2-\mathbf{n})\mathbf{a}}{r^3} + \frac{\mathbf{r}(\mathbf{a} \mathbf{r})}{r^{3+2}}$$

Ist eine Kurve gegeben und ist \mathbf{r} der Ortsvektor ihrer Punkte, so ist

$$(2) \quad \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{t}_1$$

ein Einheitsvektor parallel zur Tangente im Punkte \mathbf{r} .

Ferner ist

$$(3) \quad \frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} = \frac{\mathfrak{R}}{R^3}$$

Hierin ist \mathfrak{R} ein Vektor, welcher Richtung und Länge des Krümmungsradius der Kurve im Punkte \mathbf{r} angibt.

\mathfrak{R} und \mathbf{t}_1 bestimmen also die Schmiegungsebene der Kurve im Punkte \mathbf{r} .

8. Unstetige Vektorfelder.

1. Es sei $\operatorname{rot} \alpha = 0$

und $\operatorname{div} \alpha = 0$, außer für $r = 0$.

Dann ist

$$(1) \quad \int a_n df = \text{const} = 4\pi e$$

für jede die Stelle $r = 0$ umschließende Fläche,

$$(2) \quad \int a_n df = 0$$

für jede die Stelle $r = 0$ nicht umschließende Fläche (vgl. S. 155).

e heißt die „Ergiebigkeit“ der „Quelle“ in $r = 0$.

Es wird

$$(3) \quad \alpha = -\operatorname{grad} \varphi; \quad \varphi = \frac{e}{r}.$$

1a. Es sei $\operatorname{div} \alpha = 0$ außer in $r = 0$ und in $r = l$, und zwar sei die Ergiebigkeit der beiden Quellen $= -e$ bzw. $+e$. Läßt man dann l zur Grenze 0 übergehen, wobei $le = m$ endlich bleibe, so spricht man von einer „Doppelquelle“ vom „Moment“ m .

Es wird

$$(4) \quad \alpha = -\operatorname{grad} \varphi; \quad \varphi = \left(m \operatorname{grad} \frac{1}{r}\right) = -\frac{(mr)}{r^3}.$$

2. Es sei $\operatorname{rot} \alpha = 0$

und $\operatorname{div} \alpha = 0$.

α ändere sich unstetig an einer Fläche, so daß a_n beim Übergang von einer Seite der Fläche zur anderen von a_{n1} auf $-a_{n2}$ springt. Wir definieren die Größe

$$(5) \quad \omega = -\frac{1}{4\pi}(a_{n1} + a_{n2}),$$

wo n der nach der Fläche hin gerichtete Normalvektor ist.

$4\pi\omega$ heißt „Flächendivergenz“.

ω ist die auf die Flächeneinheit bezogene Ergiebigkeit der über die Fläche verteilt gedachten Quellen.

Springt auch φ an der Fläche, so definieren wir die Größe

$$(6) \quad \tau = \frac{1}{4\pi}(\varphi_1 - \varphi_2).$$

In diesem Falle spricht man von einer „Doppelfläche“ oder „Doppelschicht“ mit dem „Moment“ $4\pi\tau$.

Dann ist $\alpha = -\operatorname{grad} \varphi$

$$(7) \quad \varphi = \int df \left(\frac{\omega}{r} - \tau \left(n_1 \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right) \right),$$

erstreckt über die Fläche.

Ist τ eine Konstante längs der Fläche und $\omega = 0$, so wird

$$(8) \quad \varphi = \tau \Omega,$$

wo Ω der räumliche Winkel ist, unter dem die Berandung der Fläche vom Aufpunkt aus erscheint.

$$3. \text{ Es sei} \quad \operatorname{div} \alpha = 0$$

$$\text{und} \quad \operatorname{rot} \alpha = 0,$$

außer auf einer Linie L („Wirbellinie“).

Dann ist für jede die Linie umfassende Kurve

$$(9) \quad \int ds a_s = \int df \operatorname{rot}_n \alpha = \text{const} = 4\pi\tau \text{ (vgl. S. 155),}$$

wobei die Fläche $\int df$ beliebig verzerrt werden kann. Daraus folgt, daß τ längs L konstant und daß die Wirbellinie L geschlossen sein oder im Unendlichen endigen muß.

τ heißt das *Moment der Wirbellinie*.

Wegen $dv = ds df$ ist dann das Vektorpotential der Wirbellinie gegeben durch

$$(10) \quad \mathfrak{A} = \frac{1}{4\pi} \int \int \frac{ds df \operatorname{rot} \alpha}{r} = \tau \int_L \frac{d\mathfrak{s}}{r},$$

daraus folgt

$$(11) \quad \alpha = \operatorname{rot} \mathfrak{A} = \tau \int_L \frac{1}{r^3} [d\mathfrak{s} r].$$

Da α außer auf L *wirbelfrei* ist, läßt sich α auch aus einem skalaren Potential φ ableiten $\alpha = -\operatorname{grad} \varphi$, wobei jedoch für jede den geschlossenen Wirbelfaden umfassende Kurve nach (9)

$$\int_1^2 ds a_s = \varphi_1 - \varphi_2 = 4\pi\tau$$

ist, falls 1 und 2 zwei zusammengehörige Vorder- und Rückseitenpunkte auf einer über L ausgespannten Fläche F sind. Die Wirbellinie L vom Moment $4\pi\tau$ ist also äquivalent einer Doppelfläche F vom Moment $4\pi\tau$, welche über L beliebig ausgespannt ist. Das skalare Potential ist also $\varphi = \tau \Omega$ und $\alpha = -\operatorname{grad} \varphi$.

4. Es sei $\operatorname{rot} \alpha = 0$ *außer auf einer Fläche* und $\operatorname{div} \alpha = 0$, d. h. α ändere sich unstetig an einer Fläche, so daß $[n \alpha]$ (eine Parallelkomponente zur Fläche) beim Übergang von einer Seite der Fläche zur anderen von $[n \alpha_1]$ zu $[n \alpha_2]$ springt.

Wir definieren den Vektor

$$(12) \quad g = \frac{1}{4\pi} [n (\alpha_1 - \alpha_2)].$$

$4\pi g$ heißt „*Flächenwirbel*“.

Es ist dann

$$(13) \quad \mathfrak{A} = \int df \frac{g}{r}; \quad \alpha = \operatorname{rot} \mathfrak{A}.$$

9. Vektorgleichungen.

\mathfrak{x} sei ein unbekannter Vektor, der zu ermitteln ist.

1. $\mathfrak{x} + \mathfrak{a} = \mathfrak{b}$. Lösung: $\mathfrak{x} = \mathfrak{b} - \mathfrak{a}$.

2. $\begin{cases} (\mathfrak{x} \mathfrak{a}) = p \\ [\mathfrak{x} \mathfrak{a}] = \mathfrak{b} \end{cases}$ Lösung: $\mathfrak{x} = \frac{p}{a^2} \mathfrak{a} + \frac{[\mathfrak{a} \mathfrak{b}]}{a^2}$.

Ist nur eine der Gleichungen gegeben, so bleibt \mathfrak{b} bzw. p unbestimmt.

3. $\begin{cases} (\mathfrak{x} \mathfrak{a}) = p \\ (\mathfrak{x} \mathfrak{b}) = q \\ (\mathfrak{x} \mathfrak{c}) = r \end{cases}$ Lösung: $\mathfrak{x} = \frac{p [\mathfrak{b} \mathfrak{c}] + q [\mathfrak{c} \mathfrak{a}] + r [\mathfrak{a} \mathfrak{b}]}{(a [\mathfrak{b} \mathfrak{c}])}$.

4. $p = x a + y b + z c$.
Lösung: $x = \frac{(p [\mathfrak{b} \mathfrak{c}])}{(a [\mathfrak{b} \mathfrak{c}])}$, $y = \frac{(p [\mathfrak{c} \mathfrak{a}])}{(a [\mathfrak{b} \mathfrak{c}])}$, $z = \frac{(p [\mathfrak{a} \mathfrak{b}])}{(a [\mathfrak{b} \mathfrak{c}])}$.

5. $p = x [\mathfrak{b} \mathfrak{c}] + y [\mathfrak{c} \mathfrak{a}] + z [\mathfrak{a} \mathfrak{b}]$.
Lösung: $x = \frac{(p a)}{(a [\mathfrak{b} \mathfrak{c}])}$, $y = \frac{(p b)}{(a [\mathfrak{b} \mathfrak{c}])}$, $z = \frac{(p c)}{(a [\mathfrak{b} \mathfrak{c}])}$.

Es ist zu beachten, daß eine Gleichung, die zwei Vektoren gleichsetzt, drei algebraischen Gleichungen äquivalent ist. Andererseits ist ein unbekannter Vektor äquivalent drei algebraischen Unbekannten.

10. Lineare Vektorfeldfunktion.

Schreitet man in einem Vektorfelde \mathfrak{a} längs einer beliebigen Geraden fort und ist hierbei der Vektor \mathfrak{a} eine lineare Funktion der auf der Geraden gemessenen Länge, also darstellbar in der Form $\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{b} d$, wo \mathfrak{b} einen konstanten nur durch die Richtung der Geraden bestimmten Vektor bedeutet und d den Abstand zwischen den Punkten der Vektoren \mathfrak{a}_1 und \mathfrak{a}_2 , so heißt das Vektorfeld \mathfrak{a} eine lineare Vektorfunktion des Orts.

Eine solche Funktion läßt sich z. B. aufbauen aus einer Anzahl von Größen der Form:

$$(1) \quad \mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0 + k r + \sum_n ([u_n r] + p_n (q_n r) + [b_n [a_n r]] + \dots),$$

d. h. aus einer Summe von Vektoren, die von r linear abhängen. Die Größen $\mathfrak{a}_0, k, u_n, p_n, q_n, b_n, e_n$ seien hierbei Konstanten bzw. freie Vektoren.

Der Ausdruck läßt sich aber, ohne seine Allgemeinheit zu beschränken, auch in der einfacheren Form schreiben:

$$(2) \quad \mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0 + \sum_n (p_n (q_n r)) \quad (n = 1, 2, 3),$$

wo die p_n und q_n freie Vektoren seien.

Es ist dann

$$(3) \quad \operatorname{div} a = \sum_n (p_n q_n).$$

$$(4) \quad \operatorname{rot} a = \sum_n [p_n q_n].$$

Zerlegt man $a - a_0$ in 2 Felder a' und a'' , so daß $\operatorname{div} a' = 0$ und $\operatorname{rot} a'' = 0$ wird (vgl. S. 158), d. h. in einen quellenfreien und einen wirbelfreien Teil, so ist

$$(5) \quad a - a_0 = a' + a''$$

$$(6) \quad a' = [u r]; \quad \operatorname{rot} a' = 2u; \quad u = \frac{1}{2} \sum [p_n q_n].$$

$$(7) \quad a'' = \frac{1}{2} \sum (p_n (q_n r) + q_n (p_n r)); \quad \operatorname{div} a'' = \sum (p_n q_n).$$

11. Tensoren (zweiten Grades).

a) Der Tensorbegriff.

Die lineare Abhängigkeit des letzten Paragraphen, die jedem r ein a zuordnet, schreiben wir symbolisch:

$$a - a_0 = \mathfrak{X} r$$

oder allgemein die lineare Abhängigkeit zweier Vektoren a und b :

$$(1) \quad a - \mathfrak{X} b = \sum_{n=1}^8 p_n (q_n b).$$

Den Operator \mathfrak{X} bezeichnet man als einen *Tensor*¹⁾.

Die Linearität fordert, daß:

$$(2) \quad k a = k \mathfrak{X} b = \mathfrak{X} k b$$

ferner, wenn $a' = \mathfrak{X} b'$:

$$(3) \quad a + a' = \mathfrak{X} b + \mathfrak{X} b' = \mathfrak{X} (b + b').$$

Definieren ferner die Summe zweier Tensoren \mathfrak{X}_1 und \mathfrak{X}_2 aus:

$$(4) \quad (\mathfrak{X}_1 + \mathfrak{X}_2) b = \mathfrak{X}_1 b + \mathfrak{X}_2 b,$$

so sieht man, daß der Operator \mathfrak{X} wie eine algebraische Größe im Sinne der obigen Formeln behandelt werden darf.

Ein Tensor heißt *symmetrisch*, wenn für beliebige Vektoren a und b :

$$(5) \quad (a \mathfrak{X} b) = (b \mathfrak{X} a)$$

ist, *antisymmetrisch* (oder *schiefsymmetrisch*), wenn:

$$(5') \quad (a \mathfrak{X} b) = - (b \mathfrak{X} a)$$

ist. Jeder Tensor \mathfrak{X} kann eindeutig in die Summe von einen sym-

¹⁾ Speziell als Tensor 2. Grades. Ein Skalar kann aus später ersichtlichen Gründen (vgl. S. 173) als ein Tensor 0. Grades, ein Vektor als ein solcher 1. Grades bezeichnet werden.

metrischen und einem antisymmetrischen Teil: \mathfrak{T}_1 und \mathfrak{T}_2 zerlegt werden:

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_2.$$

Der Tensor: $\tilde{\mathfrak{T}} = \mathfrak{T}_1 - \mathfrak{T}_2$ heißt der zu \mathfrak{T} *konjugierte* oder *transponierte* Tensor. Ein symmetrischer Tensor ist also zu sich selbst konjugiert. Es gilt ganz allgemein: $(a\mathfrak{T}b) = (b\tilde{\mathfrak{T}}a)$.

Die Zerlegung des Vektors $a = \mathfrak{T}r$ (§ 10, S. 163) in einen wirbelfreien und quellenfreien Teil: $a = a_1 + a_2$ entspricht dieser Zerlegung von \mathfrak{T} , d. h.

$$(6) \quad a_1 = \mathfrak{T}_1 r$$

$$(6') \quad a_2 = \mathfrak{T}_2 r.$$

Infolge der linearen Beziehung zwischen a und b kann im allgemeinen auch b durch einen neuen Tensor aus a abgeleitet werden. Er wird als der zu \mathfrak{T} *reziproke* Tensor: \mathfrak{T}^{-1} bezeichnet:

$$(7) \quad b = \mathfrak{T}^{-1} a.$$

Haben wir außer der Abhängigkeit:

$$a = \mathfrak{T} b$$

die zweite:

$$b = \mathfrak{S} c$$

also:

$$(8) \quad a = \mathfrak{T} \mathfrak{S} c$$

so vermittelt auch diese Formel eine lineare Abhängigkeit zwischen a und c , d. h., $\mathfrak{T} \mathfrak{S}$ repräsentiert einen neuen Tensor, der als das *tensorielle Produkt* von \mathfrak{T} und \mathfrak{S} bezeichnet wird. Im allgemeinen ist:

$$\mathfrak{T} \mathfrak{S} \neq \mathfrak{S} \mathfrak{T}.$$

Das tensorielle Produkt eines Tensors mit sich selbst: $\mathfrak{T} \mathfrak{T} = \mathfrak{T}^2$ heißt *iterierter* Tensor. Diese Produktbildung kann beliebig oft wiederholt werden:

$$(9) \quad \mathfrak{T} \mathfrak{T} \mathfrak{T} = \mathfrak{T}^3, \dots$$

b) Spezielle Tensoren.

Als *Einheitstensor* \mathfrak{E} bezeichnen wir einen Tensor, der jeden beliebigen Vektor a in sich selber überführt:

$$(10) \quad \mathfrak{E} a = a.$$

Für jeden beliebigen Tensor ist: $\mathfrak{T} \mathfrak{T}^{-1} = \mathfrak{E} = \mathfrak{E}^{-1} = \tilde{\mathfrak{E}}$.

Als *orthogonalen* Tensor \mathfrak{D} bezeichnen wir einen Tensor, für den

$$(11) \quad \tilde{\mathfrak{D}} = \mathfrak{D}^{-1}$$

ist. Daraus folgt für beliebige Vektoren a und b :

$$(12) \quad (\mathfrak{D} a \mathfrak{D} b) = (a b).$$

Die durch einen solchen Tensor festgelegte Zuordnung kann für ein beliebiges System von Vektoren durch eine vom Tensor allein bedingte bloße Drehung beschrieben werden, d. h. es bleibt der Betrag aller Vektoren erhalten: $(\mathfrak{D}a)^2 = (a)^2$, wie auch die Winkel zwischen ihnen.

c) Abgeleitete Skalare.

Bildet man den Ausdruck:

$$(13) \quad \frac{(\mathfrak{X} a [\mathfrak{X} b \mathfrak{X} c])}{(a [b c])} = |T|,$$

so erkennt man leicht, daß für irgend 3 nichtkonplanare Vektoren a , b , c dieser Ausdruck von a , b und c unabhängig ist. Er ist also ein von \mathfrak{X} allein abhängiger Skalar. Man bezeichnet ihn als die *Determinante* des Tensors (vgl. S. 174).

Bildet man die Determinante für den Tensor:

$$\mathfrak{X} + \lambda \mathfrak{E}$$

und entwickelt ihn nach den Potenzen von λ , so erhält man einen Ausdruck der Form:

$$(14) \quad \lambda^3 + \lambda^2 T_{(1)} + \lambda T_{(2)} + |T|.$$

Die hier auftretenden Größen $T_{(1)}$ und $T_{(2)}$ sind zwei weitere Skalare, die aus dem Tensor \mathfrak{X} abzuleiten sind. Wir schreiben im weiteren statt $T_{(1)}$: $|\mathfrak{X}|$, und bezeichnen diese Größe als *Spur* des Tensors. Es ist ferner:

$$(15) \quad T_{(2)} = |T| |\mathfrak{X}^{-1}|.$$

Als *skalares Produkt* von \mathfrak{X} und \mathfrak{E} bezeichnet man die Spur des tensoriellen Produktes $\mathfrak{X} \mathfrak{E}$:

$$(16) \quad (\mathfrak{X} \mathfrak{E}) = |\mathfrak{X} \mathfrak{E}|.$$

Es gilt:

$$(17) \quad (\mathfrak{X} \mathfrak{E}) = (\mathfrak{E} \mathfrak{X}).$$

Das so gebildete Produkt eines Tensors mit sich selbst ergibt einen neuen Skalar, den man als *Quadrat* des Tensors bezeichnen kann.

Für antisymmetrische Tensoren ist die Spur immer $= 0$, die Determinante verschwindet dann gleichfalls¹⁾.

Für den Einheitstensor gilt:

$$|E| = 1, \quad |\mathfrak{E}| = 3, \quad (\mathfrak{E} \mathfrak{E}) = 3.$$

Für den orthogonalen Tensor gilt:

$$|O| = 1 \quad (\mathfrak{O} \mathfrak{O}) = 3$$

und:

$$|\mathfrak{O}| = 1 + 2 \cos \delta,$$

wenn δ den Winkel der Drehung bezeichnet (vgl. S. 84).

¹⁾ Entwickelt man eine Vektoranalysis in Räumen beliebiger Mannigfaltigkeit, so verschwindet die Determinante nur bei *ungeradzahlig*er Mannigfaltigkeit.

d) Das Tensorellipsoid.

Definiert man eine Fläche durch die Gleichung:

$$(18) \quad (\mathfrak{T} \mathfrak{r}) = 1,$$

so stellt diese ein *Ellipsoid* dar: das *Tensorellipsoid*. Dieses gestattet eine geometrische Darstellung des *symmetrischen* Teils eines Tensors. Die Hauptachsen dieses Ellipsoids werden zugleich als *Hauptachsen des Tensors* bezeichnet.

Den antisymmetrischen Teil eines Tensors: $\mathfrak{T}_2 = \frac{1}{2}(\mathfrak{T} - \tilde{\mathfrak{T}})$ kann man gleichfalls geometrisch, und zwar durch einen Vektor \mathfrak{u} darstellen. Dieser wird festgelegt durch die Gleichungen:

$$(19) \quad \mathfrak{u} = \frac{[\mathfrak{a} \mathfrak{T}_2 \mathfrak{a}]}{\mathfrak{a}^2}.$$

Man überzeugt sich leicht, daß dieser Vektor \mathfrak{u} von der Wahl von \mathfrak{a} unabhängig ist. Daraus folgt weiter:

$$(20) \quad \mathfrak{T}_2 \mathfrak{a} = [\mathfrak{u} \mathfrak{a}].$$

e) Zusammenhang zwischen iterierten Tensoren.

Zwischen 4 durch Iteration nacheinander gewonnenen Tensoren: $\mathfrak{T}^n, \mathfrak{T}^{n+1}, \mathfrak{T}^{n+2}, \mathfrak{T}^{n+3}$ besteht folgende identische Relation:

$$(21) \quad \mathfrak{T}^{n+3} - |\mathfrak{T}| \mathfrak{T}^{n+2} + |\mathfrak{T}^{-1}| |T| \mathfrak{T}^{n+1} - |T| \mathfrak{T}^n = 0^3.$$

Diese Relation kann bei der Lösung von Tensorgleichungen benutzt werden. Ist z. B. gegeben die Gleichung:

$$\mathfrak{T} \mathfrak{a} - C \mathfrak{a} = \mathfrak{b},$$

dann ist:

$$\mathfrak{T}^2 \mathfrak{a} - C \mathfrak{T} \mathfrak{a} = \mathfrak{T} \mathfrak{b},$$

$$\mathfrak{T}^3 \mathfrak{a} - C \mathfrak{T}^2 \mathfrak{a} = \mathfrak{T}^2 \mathfrak{b}.$$

Eliminiert aus diesen drei Gleichungen unter Benutzung obiger Identität $\mathfrak{T} \mathfrak{a}$, $\mathfrak{T}^2 \mathfrak{a}$, $\mathfrak{T}^3 \mathfrak{a}$, so bleibt \mathfrak{a} als Funktion von

$$C, |\mathfrak{T}|, |\mathfrak{T}^{-1}|, |T|, \mathfrak{b}, \mathfrak{T} \mathfrak{b}, \mathfrak{T}^2 \mathfrak{b}.$$

f) Ortsabhängige Tensoren.

Ist der Tensor als eine Funktion des Ortes gegeben, so spricht man von einem *Tensorfeld*. Aus einem solchen können wir einen *Vektor* ableiten, der aus der Ortsabhängigkeit des Tensors entspringt:

$$(22) \quad \operatorname{div} \mathfrak{T} = \frac{1}{V} \int_V d\mathfrak{r} (\mathfrak{T} \mathfrak{n})$$

$\lim_{V \rightarrow 0}$

\mathfrak{n} bedeutet, wie früher, die Normale der das Volumen V umschließenden Oberfläche.

¹⁾ In Mannigfaltigkeiten von der Ordnung n besteht eine analoge Beziehung zwischen $n+1$ solcher Tensoren.

Dem *Gaußschen* Satz entspricht die Gleichung:

$$(23) \quad \int df(\mathfrak{X}n) = \int dv \operatorname{div} \mathfrak{X}.$$

Ferner gilt:

$$(24) \quad \operatorname{div}(\varphi \mathfrak{X}) = \varphi \operatorname{div} \mathfrak{X} + \mathfrak{X} \operatorname{grad} \varphi$$

speziell für den Einheitstensor:

$$(24') \quad \operatorname{div}(\varphi \mathfrak{E}) = \operatorname{grad} \varphi.$$

Die Anwendung des *Gaußschen* Satzes auf den Vektor $\mathfrak{X}a$ ergibt:

$$(25) \quad \int dv \operatorname{div} \mathfrak{X}a = \int df(n \mathfrak{X}a) = \int df(a \tilde{\mathfrak{X}}n).$$

g) Differentiation nach einem Parameter (t).

$$(26) \quad \frac{\partial}{\partial t}(\mathfrak{X}a) = \mathfrak{X} \frac{\partial a}{\partial t} + \mathfrak{X}'a, \quad \text{wo } \mathfrak{X}' = \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}.$$

Für den orthogonalen Tensor \mathfrak{D} ergibt sich, wenn wir unter t die Zeit verstehen:

$$(27) \quad \frac{\partial}{\partial t}(\mathfrak{D}a) = \mathfrak{D} \frac{\partial a}{\partial t} + [ua],$$

wo u der Vektor der Drehgeschwindigkeit ist, d. h. ein Vektor, dessen Richtung in die Drehachse fällt und dessen Betrag gleich der Drehgeschwindigkeit ist. Durch Verwendung eines von der Zeit abhängigen orthogonalen Tensors ist es daher möglich, ein beliebig bewegtes starres System auf Ruhe zu transformieren (vgl. S. 168).

12. Der Gradiententensor.

Analog, wie der Vektor $\operatorname{grad} \varphi$ die Ortsabhängigkeit des Skalars φ charakterisiert, können wir einen Tensor bilden, der die Ortsabhängigkeit eines Vektors darstellt.

Es entspricht der Gleichung:

$$d\varphi = (\operatorname{grad} \varphi d\mathfrak{s})$$

die analoge:

$$(1) \quad d\alpha = \mathfrak{A} d\mathfrak{s}.$$

Diesen Tensor \mathfrak{A} nennen wir den „Gradienten“ von α ¹⁾.

Es ist:

$$(2) \quad |\mathfrak{A}| = \operatorname{div} \alpha$$

$$(3) \quad \operatorname{div} \mathfrak{A} = \Delta \alpha$$

$$(4) \quad (\mathfrak{b} \operatorname{grad}) \alpha = \mathfrak{A} \mathfrak{b}.$$

Wir können den Tensor \mathfrak{A} in seinen symmetrischen und antisymme-

¹⁾ Bei Gans mit „def α “ bezeichnet; es liegt gar kein Grund vor, diesen Tensor nicht mit „grad α “ zu bezeichnen.

trischen Teil \mathfrak{A}_1 und \mathfrak{A}_2 zerlegen. Den symmetrischen Teil \mathfrak{A}_1 zerlegen wir weiter in:

$$(5) \quad \mathfrak{A}_1 = \mathfrak{E} \frac{|\mathfrak{A}|}{3} + \mathfrak{A}_1'.$$

Es ist dann:

$$(5a) \quad |\mathfrak{A}_1'| = 0$$

$$(5b) \quad \operatorname{div} \mathfrak{A} = \Delta a = \frac{1}{3} \operatorname{grad} \operatorname{div} a + \operatorname{div} \mathfrak{A}_1' + \operatorname{div} \mathfrak{A}_2$$

$$(5c) \quad \operatorname{div} \mathfrak{A}_1' = \frac{1}{3} (\Delta a + \frac{1}{3} \operatorname{grad} \operatorname{div} a)$$

$$(5d) \quad \operatorname{div} \mathfrak{A}_2 = \frac{1}{3} \operatorname{rot} \operatorname{rot} a.$$

Wir bemerken ferner noch folgende Formel:

$$(6) \quad \operatorname{div} \mathfrak{X} a = (a \operatorname{div} \mathfrak{X}) + (\mathfrak{X} \mathfrak{A}).$$

13. Tensoren höheren Grades.

Ein Vektor a kann auch durch lineare Abhängigkeit von zwei andern b und c gegeben sein:

$$a = \mathfrak{X}(b, c) = \sum p_n (q_n b) (r_n c).$$

\mathfrak{X} heißt dann Tensor 3. Grades. Analog bildet man Tensoren höheren Grades.

14. Transformation von Vektoren auf bewegtes Bezugssystem.

In einem Vektorfeld $a = a(r, t)$ d. h. einem solchen, das außer vom Ort r auch von der Zeit t abhängt, wird, wenn man es in einem mit der Geschwindigkeit v *gradlinig* starr fortschreitendes Bezugssystem $r' = r - vt$ darstellt,

$$a(r, t) = a'(r', t) \\ \frac{\partial a'}{\partial t} = \frac{\partial a}{\partial t} + (v \operatorname{grad}) a$$

analog für einen Skalar $\varphi(r, t) = \varphi'(r', t)$

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (v \operatorname{grad} \varphi).$$

$\frac{\partial a'}{\partial t}$ bedeutet also die zeitliche Änderung von a für konstantes r' , d. h. in einem festen Punkt des bewegten Systems.

In einem mit $v = v_0 + [u r]$ fortschreitendem und *rotierendem* Bezugssystem $r' = r - v_0 t - [u r] t$ wird

$$\frac{\partial a'}{\partial t} = \frac{\partial a}{\partial t} + (v \operatorname{grad}) a + [a u] = \frac{\partial a}{\partial t} + \operatorname{rot}[a v] + v \operatorname{div} a \\ \frac{\partial \varphi'}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (v \operatorname{grad} \varphi).$$

Für ein Linienintegral $\int_1^2 (\alpha d\beta)$, das längs einer sich mit der Geschwindigkeit v bewegendes Kurve gebildet ist, gilt

$$\frac{d}{dt} \int_1^2 (\alpha d\beta) = \int_1^2 d\beta \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \text{grad}(v\alpha) - [v \text{ rot } \alpha] \right)$$

und für ein Oberflächenintegral $\int df a_n$

$$\frac{d}{dt} \int df a_n = \int df \left(\frac{\partial a}{\partial t} + \text{rot}[a v] + v \text{ div } a \right).$$

15. Komplexe Vektoren.

Analog zu der Bildung komplexer Zahlen kann man auch *komplexe Vektoren* bilden, indem man setzt:

$$(1) \quad c = a + i b \quad (i = \sqrt{-1}).$$

Ein solcher Vektor entbehrt natürlich jeder Anschaulichkeit; er ist aber gelegentlich mit Vorteil zu verwenden. Besonders häufig tritt ein Ausdruck auf von der Form:

$$(2) \quad c = c_0 e^{i\omega t},$$

wo t die Zeit bedeutet. Der Realteil dieses Vektors ist dann offenbar:

$$(2') \quad a = a_0 \cos \omega t - b_0 \sin \omega t,$$

stellt also einen Vektor dar, welcher sowohl Richtung wie Größe nach von der Zeit periodisch abhängt.

Ein Vektor, für den:

$$(3) \quad c^2 = a^2 - b^2 + 2i(ab) = 0$$

ist, heißt ein *Nullvektor*. Für ihn muß $a \perp b$ sein, und $|a| = |b|$. Natürlich existieren auch *Einheitsvektoren* im Komplexen, für die $a \perp b$ ist, und:

$$(4) \quad a^2 = b^2 + 1.$$

Eine Gleichung von der Form:

$$(5) \quad c = k[uc] \quad (u \text{ reell})$$

hat im Reellen nur die triviale Lösung $c = 0$. Im Komplexen rechnen wir folgendermaßen:

$$(cc) = c^2 = 0$$

$$(uc) = 0$$

d. h., falls $c = a + ib$ gesetzt wird, wird:

$$a \perp u$$

$$b \perp u$$

$$a \perp b, |a| = |b|$$

ferner ergibt sich:

$$(6) \quad c = k^2 [u [u c]] = -k^2 (c u^2 - u (u c))$$

also:

$$(7) \quad k^2 u^2 = -1$$

oder:

$$(7') \quad k = \pm \frac{i}{u}.$$

Diese Gleichung stellt also eine *Bedingungsgleichung* für die Lösbarkeit der Ausgangsgleichung dar.

Die explizite Lösung läßt sich unter Verwendung eines willkürlichen reellen Vektors f folgendermaßen schreiben:

$$(8) \quad c = [u f] + \frac{i}{u} [u [u f]].$$

Anwendung findet diese Rechnungsart z. B. bei der Lösung der *Vektordifferentialgleichung*:

$$(9) \quad \frac{dc}{dt} = [u c].$$

Die Anschauung lehrt unmittelbar, daß durch diese Gleichung ein Vektor definiert wird, der um eine feste Achse u „präzessiert“.

Wir machen den Ansatz:

$$(10) \quad c = c_0 e^{i\omega t} + \alpha u$$

und erhalten:

$$(11) \quad c_0 = -\frac{i}{\omega} [u c_0].$$

Aus unserer obigen Bedingungsgleichung für k folgt unmittelbar:

$$(12) \quad \omega = u$$

α ist eine beliebige Konstante.

Sowohl der Realteil, wie der Imaginärteil der definitiven Lösung, sowie auch eine beliebige lineare Kombination von beiden ist selbst eine Lösung.

B. Koordinatenmäßige Formulierung der Vektoranalysis im n -dimensionalen Raume.

1. Vektorkomponenten.

Analog zum dreidimensionalen ist jeder Vektor im n -dimensionalen Raume aus n Grundvektoren e_1, e_2, \dots, e_n darzustellen in der Form:

$$(1) \quad a = a^1 e_1 + a^2 e_2 + \dots + a^n e_n = \sum_i a^i e_i$$

(falls die e_i linear unabhängig voneinander sind). Die a^1, a^2, \dots, a^n heißen die *kontravarianten Komponenten* von a (bezogen auf die

Grundvektoren). Bildet man die zu den e_i reziproken Vektoren e^i , so daß $(e^i e_k) = 1$ für $i = k$ und $= 0$ für $i \neq k$ wird, so ist auch die Darstellung

$$(2) \quad a = a_1 e^1 + a_2 e^2 + \dots + a_n e^n$$

möglich. Die a_n heißen die *kovarianten Komponenten* von a .

In einem willkürlichen (krummlinigen) Koordinatensystem¹⁾ x^1, x^2, x^3, \dots legt man die Grundvektoren e_1, e_2, e_3 an jeder Stelle in die Tangentenrichtungen der dort sich kreuzenden Koordinatenkurven $x^1 = \text{const}, x^2 = \text{const}, x^3 = \text{const}$ usw. und wählt die Beträge $|e_1|, |e_2|, |e_3|$ usw. entsprechend dem metrischen Gefälle der Koordinatenmaßzahlen $x^1, x^2, x^3 \dots$ an dieser Stelle. D.h. der Vektor $d\mathbf{s}$ mit der infinitesimalen Länge ds soll gegeben werden durch

$$(3) \quad d\mathbf{s} = e_1 dx^1 + e_2 dx^2 + e_3 dx^3 + \dots$$

Die dx^i sind also die kontravarianten Komponenten des Vektors $d\mathbf{s}$, und die Grundvektoren sind bestimmt durch

$$(4) \quad e_1 = \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial x^1}, \quad e_2 = \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial x^2}, \quad e_3 = \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial x^3}, \dots$$

Die e_i geben die *metrischen* Verhältnisse im krummlinigen Koordinatensystem an. Sie genügen den Gleichungen

$$(5) \quad \frac{\partial e_i}{\partial x^k} = \frac{\partial e_k}{\partial x^i}.$$

Es wird ferner

$$(ds)^2 = (dx^1)^2 e_1^2 + 2 dx^1 \cdot dx^2 (e_1 e_2) + \dots$$

Zur Abkürzung schreibt man oft:

$$\begin{aligned} (e_1)^2 &= g_{11}, & (e_1 e_2) &= g_{12}, & \text{usw.} \\ (e^1)^2 &= g^{11}, & (e^1 e^2) &= g^{12}, & \text{usw.} \end{aligned}$$

Es wird daher

$$(6) \quad (ds)^2 = \sum_i \sum_k g_{ik} dx^i \cdot dx^k.$$

ds heißt das „Linielement“ des Koordinatensystems. Man pflegt neuerdings die Summenzeichen fortzulassen und fordert, daß über jeden Index zu summieren ist, der in einem Gliede zweimal vorkommt.

Man schreibt also:

$$\begin{aligned} (7) \quad (ds)^2 &= dx^i dx^k g_{ik} = dx^i dx^k (e_i e_k) \\ a^2 &= a^i a^k g_{ik} = a^i a^k (e_i e_k) = a_i a_k g^{ik} = a_i a_k (e^i e^k) \\ &= a_i a^i (e^i e_k) = a_i a^i. \end{aligned}$$

Ebenso

$$(ab) = a^i b^k g_{ik} = a_i b^i = a^i b_i \text{ usw.}$$

¹⁾ Bei zeitabhängigen Koordinatensystemen vgl. S.191.

Man beachte noch folgende Relationen:

$$(8) \quad \begin{aligned} a^i &= (a e^i); & a_i &= (a e_i) \\ a_i &= g_{ik} a^k; & a^i &= g^{ik} a_k \\ (a e^i)(e_i b) &= (a b). \end{aligned}$$

Zur speziellen Rechnung ist die Verwendung der g_{ik} meist vorteilhafter als die der Vektoren e_i .

Die Größen g_{ik} bestimmt man am bequemsten durch Aufstellung der Form des Linienelementes.

Die Größen g^{ik} findet man aus diesen, indem man aus den g_{ik} die Determinante $|g|$ bildet. Nennt man G_{ik} die Unterdeterminante zu g_{ik} , so ist $g^{ik} = \frac{G_{ik}}{|g|}$. $\sqrt{|g|}$ ist gleich dem Volumen des aus den Grundvektoren e_i gebildeten Parallelepipeds.

2. Tensorkomponenten.

Die Beziehung

$$a = \mathfrak{X}(b) = \sum_n p_n (q_n b)^1$$

schreibt sich unter Weglassung der Summenzeichen über zweimal vorkommende Indizes:

$$(1) \quad a_i = p_{ni} (q_{nk} b^k) = T_{ik} b^k;$$

wo

$$T_{ik} = p_{ni} q_{nk}$$

bedeutet. T_{ik} heißen die *kovarianten* Komponenten des Tensors. (Es ist $T_{ik} = \mathfrak{X} e_i e_k$.) Entsprechend gilt:

$$(2) \quad a^i = T^{ik} b_k, \text{ wo } T^{ik} = p_n^i q_n^k \text{ ist.}$$

T^{ik} heißen die *kontravarianten* Komponenten des Tensors $T^{ik} = \mathfrak{X} e^i e^k$. Ebenso gilt:

$$a^i = T_k^i b^k, \text{ wo } T_k^i = p_n^i q_{nk} \text{ ist.}$$

T_k^i heißen die *gemischten* Komponenten des Tensors ($T_k^i = \mathfrak{X} e^i e_k$). Es ist also

$$T_{ik} = T_i^l (e_l e_k) = T_i^l g_{lk}$$

und

$$T_{ik} = T^{lm} g_{li} g_{km}.$$

Der Tensor ist symmetrisch, wenn $T_{ik} = T_{ki}$ ist. Der Tensor ist schief-symmetrisch oder antisymmetrisch, wenn $T_{ik} = -T_{ki}$ ist. Auch die Größen g_{ik} sind die kovarianten Komponenten eines symmetrischen Tensors, nämlich des Einheitstensors \mathfrak{E} , wo $a = \mathfrak{E} a$ (vgl. S. 164). Hier ist $p_n = e_n$, $q_n = e^n$ zu setzen.

¹⁾ Die Summe über den Index n muß zur vollen Allgemeinheit im n -Dimensionalen n unabhängige Glieder enthalten.

3. Tensoren höheren Grades.

Tensoren höheren Grades sind entsprechend zu bilden. Z. B.

$$(1) \quad \begin{cases} T_{ikl} = \sum_n p_{ni} q_{nk} r_{nl} \\ T_{kll}^i = \sum_n p_n^i q_{nk} r_{nl} \text{ usw.} \end{cases}$$

Vektoren kann man hiernach auch als Tensoren 1. Grades, Skalare als Tensoren 0. Grades bezeichnen.

4. 3-Indizes-Symbole.

Der im weiteren häufig vorkommende Ausdruck

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ir}}{\partial x^s} + \frac{\partial g_{is}}{\partial x^r} - \frac{\partial g_{rs}}{\partial x^i} \right)$$

wird abgekürzt durch die Form:

$$\begin{bmatrix} rs \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sr \\ i \end{bmatrix}$$

und $g^{ij} \begin{bmatrix} rs \\ i \end{bmatrix}$ durch

$$\left\{ \begin{matrix} rs \\ i \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} sr \\ i \end{matrix} \right\} = -\Gamma_{rs}^i.$$

Γ_{rs}^i ist kein Tensor.

Es gilt:

$$(1) \quad \begin{bmatrix} ri \\ s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} si \\ r \end{bmatrix} = \frac{\partial g_{rs}}{\partial x^i}$$

$$(2) \quad \left\{ \begin{matrix} ir \\ i \end{matrix} \right\} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^r} = \frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial x^r} = \operatorname{div} e_r = \left(e^i \frac{\partial e_r}{\partial x^i} \right).$$

In den Grundvektoren ausgedrückt ist:

$$(3) \quad \begin{bmatrix} rs \\ i \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial e_s}{\partial x^r} e_i \right) = \left(\frac{\partial e_r}{\partial x^s} e_i \right)$$

und

$$(4) \quad \left\{ \begin{matrix} rs \\ i \end{matrix} \right\} = - \left(\frac{\partial e^i}{\partial x^r} e_s \right) = \left(e^i \frac{\partial e_s}{\partial x^r} \right) = \left(e^i \frac{\partial e_r}{\partial x^s} \right).$$

5. Transformationen.

Beim Übergang von den krummlinigen Koordinaten x^i zu neuen krummlinigen Koordinaten transformieren sich die kontravarianten Komponenten des *Linienelements* (unter Fortlassung der Summenzeichen):

$$dx^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} dx^i.$$

Nach demselben Gesetz transformieren sich die kontravarianten Komponenten eines *Vektors* a

$$a^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} a^k.$$

Die kovarianten Komponenten transformieren sich durch

$$a_{i'} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}} a_k.$$

Daher wird für jede Transformation

$$a_i b^i = a_{i'} b^{i'} = a^i b_i = a^{i'} b_{i'} = \text{Invariante (Skalar)}.$$

Die Komponenten eines *Tensors* 2. Grades transformieren sich wie die Produkte der Komponenten zweier Vektoren, und zwar T^{ik} wie $(a^i b^k)$, T_{ik} wie $(a_i b_k)$, T_i^k wie $(a_i b^k)$. Also

$$T_{i'k} = \frac{\partial x^m}{\partial x^{i'}} \cdot \frac{\partial x^n}{\partial x^k} \cdot T_{mn}.$$

$$T^{i'k'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^m} \cdot \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^n} \cdot T^{mn}.$$

$$T_i^{k'} = \frac{\partial x^m}{\partial x^{i'}} \cdot \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^n} \cdot T_m^n.$$

Es wird daher für jede Transformation $T_{ik} S^{ik}$ eine Invariante (Skalar), wenn \mathfrak{X} und \mathfrak{S} Tensoren sind.

Umgekehrt: Ist für jeden beliebigen Tensor \mathfrak{S} die Größe $T_{ik} S^{ik}$ ein Skalar, so ist \mathfrak{X} ein Tensor.

Entsprechendes gilt für Tensoren beliebigen Grades.

Zusammenstellung der wichtigsten Invarianten:

$$a^2 = a_i a^i, (a \cdot b) = a_i b^i = a^i b_i$$

$$(a [b \cdot c]) = \sqrt{g} \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} \quad (\text{im Dreidimensionalen}).$$

$$|\mathfrak{X}| = T_i^i = T_{ik} g^{ik} = T^{ik} g_{ik}$$

$$(\mathfrak{X} \cdot \mathfrak{X}) = T_{ik} T^{ik} = T_k^i T_i^k \quad (\mathfrak{X} \cdot \mathfrak{S}) = T_{ik} S^{ik}$$

$$|T| = |T_k^i| \quad (\text{Determinante}).$$

$$\mathfrak{X} a b = T_{ik} a^i b^k$$

6. Verjüngung und Erweiterung.

Aus einem Tensor T^{ik} erhält man durch Multiplikation mit g_{ik} den Skalar $|\mathfrak{X}| = T^{ik} g_{ik}$, aus T_j^{ik} den Vektor $t_j = T_j^{ik} g_{ik}$ usw. Diese Operation, die den Grad eines Tensors um 2 erniedrigt, heißt Verjüngung.

Durch Differentiation erhält man umgekehrt aus Tensoren solche höheren Grades (Erweiterung), durch Kombination mit Verjüngung auch solche niederen Grades. Bei der Differentiation ist zu beachten, daß die e_i mit zu differenzieren sind¹⁾. Dadurch erhält man unter Benutzung der 3-Indizes-Symbole u. a. folgende Ausdrücke:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \quad (\alpha = \text{grad } \varphi) \\ a_{ik} = \frac{\partial b_i}{\partial x^k} - \left\{ \begin{smallmatrix} i & k \\ r \end{smallmatrix} \right\} b_r \quad (\mathfrak{A} = \text{grad } \mathfrak{b}) \text{ vgl. S. 167.} \\ a_k^i = \frac{\partial b^i}{\partial x^k} + \left\{ \begin{smallmatrix} k & r \\ i \end{smallmatrix} \right\} b^r \\ a_{ikl} = \frac{\partial b_{ik}}{\partial x^l} - \left\{ \begin{smallmatrix} i & l \\ r \end{smallmatrix} \right\} b_{rk} - \left\{ \begin{smallmatrix} k & l \\ r \end{smallmatrix} \right\} b_{ir} \\ a_{ki}^i = \frac{\partial b_k^i}{\partial x^i} + \left\{ \begin{smallmatrix} i & r \\ i \end{smallmatrix} \right\} b_k^r - \left\{ \begin{smallmatrix} k & l \\ r \end{smallmatrix} \right\} b_r^i \\ a_i^{ik} = \frac{\partial b^{ik}}{\partial x^i} + \left\{ \begin{smallmatrix} i & r \\ i \end{smallmatrix} \right\} b_r^k + \left\{ \begin{smallmatrix} i & r \\ k \end{smallmatrix} \right\} b^{ir} \end{array} \right.$$

und durch Kombination u. a.

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} c_{ik} = a_{ik} - a_{ki} = \frac{\partial b_i}{\partial x^k} - \frac{\partial b_k}{\partial x^i} \\ c^i = \frac{\partial a^i}{\partial x^k} b^k + \left\{ \begin{smallmatrix} k & r \\ i \end{smallmatrix} \right\} a^r b^k; \quad (c = (b \text{ grad } a)). \end{array} \right.$$

Durch Kombination mit Verjüngung findet man u. a.

$$(3) \quad \psi = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g} a^i)}{\partial x^i} \quad (\psi = \text{div } a = (e^i \frac{\partial a}{\partial x^i}))$$

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_i = \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \frac{\partial (\sqrt{g} T_i^r)}{\partial x^k} - \left\{ \begin{smallmatrix} i & r \\ s \end{smallmatrix} \right\} T_s^r \\ a^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \frac{\partial (\sqrt{g} T^{ik})}{\partial x^k} + \left\{ \begin{smallmatrix} r & s \\ i \end{smallmatrix} \right\} T_r^s \end{array} \right. \quad (\alpha = \text{div } \mathfrak{T})$$

$$(5) \quad \psi = \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g} \cdot g^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \right) \quad (\psi = \Delta \varphi)$$

¹⁾ $da = \frac{\partial}{\partial x^k} (a^i e_i) dx^k = a^i \frac{\partial e_i}{\partial x^k} dx^k + e_i \frac{\partial a^i}{\partial x^k} dx^k$

$(da)^i = da \cdot e^i = \left(\frac{\partial a^i}{\partial x^k} + a^l \left(e^l \frac{\partial e_i}{\partial x^k} \right) \right) dx^k = \left(\frac{\partial a^i}{\partial x^k} + \left\{ \begin{smallmatrix} i & k \\ l \end{smallmatrix} \right\} a^l \right) dx^k = a_k^i dx^k$

d. h. das Differential der Komponente ist nicht gleich der Komponente des Differentials: $d(a^i) \neq (da)^i$.

7. Erweiterung und Verjüngung in Anwendung auf den Tensor g_{ik} .

Für den Tensor g_{ik} erhält man speziell:

$$(1) \quad \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \frac{\partial \sqrt{g} g^{ik}}{\partial x^k} + \left\{ \begin{matrix} r s \\ i \end{matrix} \right\} g^{rs} = 0$$

$$(2) \quad \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} + \left\{ \begin{matrix} l r \\ i \end{matrix} \right\} g^{rk} + \left\{ \begin{matrix} l r \\ k \end{matrix} \right\} g^{ir} = 0$$

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \left\{ \begin{matrix} l h \\ i \end{matrix} \right\} g_{hr} - \left\{ \begin{matrix} l i \\ r \end{matrix} \right\} g_{rh} = 0$$

An Tensoren höheren Grades ist aus g_{ik} nur der folgende abzuleiten

$$(3) \quad R^i{}_{jkh} = \frac{\partial}{\partial x^k} \left\{ \begin{matrix} j h \\ i \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^h} \left\{ \begin{matrix} j h \\ i \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} r h \\ i \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j h \\ r \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} r h \\ i \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j h \\ r \end{matrix} \right\}$$

und hieraus durch Verjüngung ein anderer Tensor 2. Grades

$$(4) \quad R_{ik} = \frac{\partial}{\partial x^k} \left\{ \begin{matrix} i r \\ r \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^r} \left\{ \begin{matrix} i h \\ r \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} i r \\ s \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} h s \\ r \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} i h \\ r \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} r s \\ s \end{matrix} \right\}$$

und der Skalar

$$R = g^{ik} R_{ik}.$$

Die Größe $R^i{}_{jkh}$ heißt der „*Riemann-Christoffelsche* Krümmungstensor“.

Das Verschwinden dieses Tensors ist die Bedingung dafür, daß die n -dimensionale Mannigfaltigkeit, ausgemessen mit dem Linienelement ds , die *Euklidische* Geometrie erfüllt.

In den Grundvektoren ausgedrückt ist

$$R^i{}_{jkh} = \left(e^i \left\{ \frac{\partial}{\partial x^h} \left(\frac{\partial e_j}{\partial x^k} \right) - \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial e_j}{\partial x^h} \right) \right\} \right).$$

Die Differentialgleichung einer geraden Linie, d. h. einer Linie, für die die Bogenlänge $\int ds$ zwischen je zwei ihrer Punkte ein Minimum ist (geodätische Linie), lautet:

$$(1) \quad \frac{d^2 x^i}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} h l \\ i \end{matrix} \right\} \frac{dx^h}{ds} \frac{dx^l}{ds} = 0.$$

Die Differentialgleichung einer Feldlinie (Kraftlinie) eines Vektorfeldes a lautet

$$(2) \quad \frac{dx^i}{ds} = a^i,$$

wo $a^i = f^i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ist.

Verschiebt man einen Vektor a aus dem Punkte (x_1, x_2, \dots, x_n) ungeändert und parallel zu sich (Verpflanzung) um δs , so ändern sich seine Komponenten a^i zu $a^i + \delta a^i$ und es gilt

$$(3) \quad \delta a^i = - \left\{ \begin{matrix} r & s \\ i \end{matrix} \right\} a^r \delta x^s$$

bzw.

$$\delta a_i = \left\{ \begin{matrix} i & s \\ r \end{matrix} \right\} a_r \delta x^s.$$

Setzt man diese Parallelverschiebung von Punkt zu Punkt längs einer geschlossenen Kurve fort, so lautet die Bedingung dafür, daß die Komponenten a^i wieder ihren ursprünglichen Wert annehmen:

$$(4) \quad R^i_{j, \Lambda k} = 0.$$

8. Orthogonale Koordinaten im 3-dimensionalen Raum.

(Im folgenden ist jedes Summenzeichen ausgeschrieben!)

In orthogonalen Koordinatensystemen ist es vorteilhaft, ein anderes System von Grundvektoren zu verwenden, nämlich *Einheitsvektoren* i_1, i_2, i_3, \dots in Richtung der früheren e_1, e_2, e_3, \dots . Hier werden die i_k mit ihrem reziproken i^k identisch. Es gibt also auch nur eine Art von Komponenten, die als *physikalische Komponenten* bezeichnet werden sollen, da sie in der Physik häufig verwandt werden. Sie sind die Beträge der komponierenden Vektoren.

Es ist hier also zu schreiben

$$a = \bar{a}_1 i_1 + \bar{a}_2 i_2 + \bar{a}_3 i_3,$$

wo

$$\bar{a}_i = a^i e_i = \frac{a_i}{e_i} = \sqrt{a_i a^i}$$

ist, wenn man mit e_i den Betrag von e_i bezeichnet, der aus dem Linienelement

$$ds = \sqrt{e_1^2 (dx^1)^2 + e_2^2 (dx^2)^2 + \dots}$$

zu entnehmen ist.

Der Betrag von e^i ist hier gleich $\frac{1}{e_i}$.

Die physikalischen Komponenten \bar{a}_i sind also die geometrischen Mittel der kontravarianten und kovarianten Komponenten.

Hieraus folgen die Formeln:

$$a^2 = \sum_i \bar{a}_i^2; \quad (a b) = \sum_i \bar{a}_i \bar{b}_i.$$

Die Tensorrelation $a = \mathfrak{T} b$ schreibt sich:

$$\bar{a}_i = \sum_k \bar{T}_{ik} \bar{b}_k,$$

wobei die *physikalischen Komponenten* des *Tensors* sich berechnen durch

$$\bar{T}_{ik} = \frac{T_{ik}}{e_i e_k} = T^{rs} \cdot e_r e_s = T^r_s e_r \frac{e_i}{e_k}.$$

Für die Transformation der für die allgemeinen Komponenten gefundenen Formeln in solche mit physikalischen Komponenten gelten also folgende Beziehungen:

$$a^i = \bar{a}_i; \quad a_i = \bar{a}_i e_i$$

$$T_{ik} = \bar{T}_{ik} e_i e_k; \quad T^{ik} = \frac{\bar{T}_{ik}}{e_i e_k}; \quad T^i_k = \bar{T}_{ik} \frac{e_k}{e_i}.$$

dx^i ist hier natürlich keine Vektorkomponente, sondern nur

$$dx^i e_i = \bar{d}s_i.$$

Die Größen g_{ik} verschwinden für $i \neq k$, für $i = k$ ist

$$g_{ii} = e_i^2; \quad g^{ii} = \frac{1}{e_i^2}$$

zu setzen und

$$\sqrt{g} = e_1 e_2 e_3 \dots$$

Die 3-Indizes-Symbole werden in orthogonalen Systemen einfach

$$\left\{ \begin{smallmatrix} i & h \\ l \end{smallmatrix} \right\} = \frac{1}{e_l^3} \left((lk) e_k \cdot \frac{\partial e_k}{\partial x^l} + (li) e_i \cdot \frac{\partial e_i}{\partial x^k} - (ik) e_k \cdot \frac{\partial e_k}{\partial x^i} \right),$$

wo die Symbole (lk) usw. 1 bzw. 0 bedeuten, je nachdem $l = k$ oder $l \neq k$ ist, d. h.

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{smallmatrix} i & h \\ l \end{smallmatrix} \right\} &= 0 \quad \text{für } i \neq k \neq l \neq i \\ &= -\frac{e_k}{e_l^3} \cdot \frac{\partial e_k}{\partial x^l} \quad \text{für } i = k \neq l \\ &= \frac{1}{e_l} \cdot \frac{\partial e_i}{\partial x^k} \quad \text{für } i = l \neq k \\ &= \frac{1}{e_i} \cdot \frac{\partial e_i}{\partial x^k} \quad \text{für } i = l = k. \end{aligned}$$

Durch diese Beziehungen transformieren sich die Formeln von S. 175 folgendermaßen in physikalische Komponenten:

$$\bar{a}_i = \frac{1}{e_i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \quad (\alpha = \text{grad } \varphi)$$

$$\bar{a}_{ik} = \frac{1}{e_i e_k} \left(\frac{\partial \bar{b}_i e_i}{\partial x^k} - \sum_r \frac{\bar{b}_r e_r}{e_r^3} \left\{ (rk) e_k \cdot \frac{\partial e_k}{\partial x^i} + (ri) e_i \cdot \frac{\partial e_i}{\partial x^k} - (ik) e_k \cdot \frac{\partial e_k}{\partial x^r} \right\} \right)$$

$$= \frac{1}{e_i e_k} \left(\frac{\partial \bar{b}_i e_i}{\partial x^k} - \bar{b}_k \cdot \frac{\partial e_k}{\partial x^i} - \bar{b}_i \cdot \frac{\partial e_i}{\partial x^k} + (ik) \sum_r \frac{\bar{b}_r e_r}{e_r} \cdot \frac{\partial e_k}{\partial x^r} \right)$$

$$= \frac{1}{e_k} \left(\frac{\partial \bar{b}_i}{\partial x^k} - \frac{\bar{b}_k}{e_i} \cdot \frac{\partial e_k}{\partial x^i} + (ik) \cdot \sum_r \frac{\bar{b}_r}{e_r} \cdot \frac{\partial e_k}{\partial x^r} \right)$$

$$\begin{aligned} \bar{a}_{ikl} &= \frac{1}{e_i} \left(\frac{\partial \bar{b}_k}{\partial x^i} - \frac{\bar{b}_k}{e_i} \cdot \frac{\partial e_i}{\partial x^k} - \frac{\bar{b}_{il}}{e_k} \cdot \frac{\partial e_i}{\partial x^k} + (il) \sum_r \frac{\bar{b}_r e_r}{e_r} \cdot \frac{\partial e_i}{\partial x^r} \right. \\ &\quad \left. + (kl) \sum_r \frac{\bar{b}_r}{e_r} \cdot \frac{\partial e_i}{\partial x^r} \right) \end{aligned}$$

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g} \frac{\bar{a}_i}{e_i} \right) \quad (\psi = \operatorname{div} \mathbf{a})$$

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g} \cdot \frac{1}{e_i^2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \right) \quad (\psi = \Delta \varphi)$$

$$\bar{a}_i = \frac{e_i}{\sqrt{g}} \sum_r \frac{\partial}{\partial x^r} \left(\sqrt{g} \cdot \frac{\bar{T}_{ir}}{e_i e_r} \right) + \sum_r \frac{(\bar{T}_{ri} + \bar{T}_{ir})}{e_i e_r} \cdot \frac{\partial e_i}{\partial x^r} - \sum_r \frac{\bar{T}_{rr}}{e_i e_r} \cdot \frac{\partial e_r}{\partial x^i} \quad (\mathbf{a} = \operatorname{div} \mathfrak{T})$$

Ist hierin \bar{T}_{ik} ein antisymmetrischer Tensor ($\bar{T}_{ik} = -\bar{T}_{ki}$), so verschwinden die beiden letzten Glieder.

Ist speziell

$$\bar{T}_{ik} = \bar{a}_{ik} - \bar{a}_{ki} = \frac{1}{e_i e_k} \left(\frac{\partial (\bar{b}_i e_i)}{\partial x^k} - \frac{\partial (\bar{b}_k e_k)}{\partial x^i} \right),$$

so wird

$$\bar{a}_i = \frac{e_i}{\sqrt{g}} \cdot \sum_r \frac{\partial}{\partial x^r} \left(\sqrt{g} \frac{\left(\frac{\partial (\bar{b}_i e_i)}{\partial x^r} - \frac{\partial (\bar{b}_r e_r)}{\partial x^i} \right)}{e_i^2 e_r^2} \right) \quad (\mathbf{a} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{b}).$$

Dieser Ausdruck ist in zwei Teile zerlegbar:

$$\bar{a}_i = \frac{1}{e_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \sum_r \frac{\partial}{\partial x^r} \left(\sqrt{g} \frac{\bar{b}_r}{e_r} \right) \right) - \bar{c}_i,$$

wo der erste Teil gleich $\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{b}$, der zweite Teil $\mathbf{c} = \Delta \mathbf{b}$ bedeutet.

$\bar{S}_{ik} = \frac{\bar{a}_{ik} + \bar{a}_{ki}}{2}$ ist der „Deformationstensor“.

Er ist symmetrisch in der Form schreibbar:

$$\bar{S}_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{e_i}{e_k} \cdot \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\bar{b}_i}{e_i} \right) + \frac{e_k}{e_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\bar{b}_k}{e_k} \right) \right) + \frac{(i \ h)}{e_k} \sum_r \frac{\bar{b}_r}{e_r} \cdot \frac{\partial e_k}{\partial x^r}.$$

Antisymmetrische Tensoren haben im 3-Dimensionalen nur 3 Komponenten. Deutet man diese als die Komponenten eines Vektors, so ist dieser hierdurch in einer vom Koordinatensystem unabhängigen Weise definiert, indem man setzt

$$\bar{T}_{12} = \bar{a}_3; \quad \bar{T}_{23} = \bar{a}_1; \quad \bar{T}_{31} = \bar{a}_2.$$

Z. B. liefert der Tensor $\bar{a}_i \bar{b}_k - \bar{a}_k \bar{b}_i = \bar{c}_i$ die Definition des Vektors $\mathbf{c} = [\mathbf{a} \mathbf{b}]$, ferner der Tensor

$$\bar{a}_{ik} - \bar{a}_{ki} = \frac{1}{e_i e_k} \cdot \left(\frac{\partial (\bar{b}_i e_i)}{\partial x^k} - \frac{\partial (\bar{b}_k e_k)}{\partial x^i} \right) = c_i$$

die Definition des Vektors $\mathbf{c} = \operatorname{rot} \mathbf{b}$.

Diese Vektoren heißen axiale im Gegensatz zu den anderen, die als polar bezeichnet werden.

Die Operation rot , angewandt auf einen axialen Vektor, ist identisch mit der Operation div , angewandt auf den antisymmetrischen Tensor (vgl. $\text{rot rot } \mathfrak{b}$).

9. Komponenten in Cartesischen Koordinaten.

In Cartesischen Koordinaten werden die drei Komponentenarten miteinander identisch, weil

$$(1) \quad e_1 = e_2 = e_3 = 1 \quad \text{und} \quad (e_1 e_2) = (e_2 e_3) = (e_3 e_1) = 0$$

ist. Wir bezeichnen die Komponenten von α mit a_x, a_y, a_z , gleich den Projektionen von α auf die x, y, z -Achse.

Das innere Produkt $(\alpha \mathfrak{b})$ wird

$$(3) \quad (\alpha \mathfrak{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Das äußere Produkt $[\alpha \mathfrak{b}]$ hat die Komponenten:

$$(4) \quad \begin{aligned} [\alpha \mathfrak{b}]_x &= a_y b_z - a_z b_y \\ [\alpha \mathfrak{b}]_y &= a_z b_x - a_x b_z \\ [\alpha \mathfrak{b}]_z &= a_x b_y - a_y b_x. \end{aligned}$$

Der Betrag eines Vektors α wird:

$$(5) \quad a = |\alpha| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2};$$

$(\alpha [\mathfrak{b} \mathfrak{c}])$ wird

$$(6) \quad \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix};$$

$\text{grad } \varphi$ hat die Komponenten:

$$(7) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z};$$

$\text{div } \alpha$ wird:

$$(8) \quad \text{div } \alpha = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z};$$

$\text{rot } \alpha$ hat die Komponenten:

$$(9) \quad \begin{cases} \text{rot}_x \alpha = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}, \\ \text{rot}_y \alpha = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}, \\ \text{rot}_z \alpha = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}. \end{cases}$$

$$(10) \quad \Delta \varphi \text{ ist } = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

$\Delta \alpha$ hat die Komponenten:

$$(11) \quad \Delta_x \alpha = \frac{\partial^2 \alpha_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \alpha_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \alpha_x}{\partial z^2} = \Delta \alpha_x \text{ usw.}$$

$(\alpha \operatorname{grad}) \mathfrak{b}$ hat die Komponenten:

$$(12) \quad (\alpha \operatorname{grad})_x \mathfrak{b} = \alpha_x \frac{\partial b_x}{\partial x} + \alpha_y \frac{\partial b_x}{\partial y} + \alpha_z \frac{\partial b_x}{\partial z} \text{ usw.}$$

Der *Gaußsche* Satz lautet:

$$(13) \quad \int \left(\frac{\partial \alpha_x}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} + \frac{\partial \alpha_z}{\partial z} \right) dv = \int (\alpha_x \cos(nx) + \alpha_y \cos(ny) + \alpha_z \cos(nz)) df.$$

Der *Stokessche* Satz lautet:

$$(14) \quad \int \left(\frac{\partial \alpha_x}{\partial y} - \frac{\partial \alpha_y}{\partial x} \right) \cos(nx) + \dots = \int (\alpha_x dx + \alpha_y dy + \alpha_z dz).$$

Eine lineare Vektorfunktion stellt sich in der Form dar:

$$(15) \quad \begin{cases} \alpha_x = a_{0x} + a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ \alpha_y = a_{0y} + a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ \alpha_z = a_{0z} + a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{cases}$$

Die Zerlegung von $\alpha - \alpha_0$ in einen quellenfreien Teil α' und einen wirbelfreien Teil α'' liefert:

$$\alpha_x = \alpha'_x + \alpha''_x$$

usw., wo

$$(16) \quad \begin{cases} \alpha'_x = \frac{1}{2} \{ (a_{12} - a_{21})y + (a_{13} - a_{31})x \} = u_y z - u_z y \\ \alpha'_y = \frac{1}{2} \{ (a_{21} - a_{12})x + (a_{23} - a_{32})z \} = u_z x - u_x z \\ \alpha'_z = \frac{1}{2} \{ (a_{31} - a_{13})x + (a_{32} - a_{23})y \} = u_x y - u_y x \end{cases}$$

und

$$(17) \quad \begin{cases} \alpha''_x = a_{11}x + \frac{1}{2}(a_{12} + a_{21})y + \frac{1}{2}(a_{13} + a_{31})z \\ \alpha''_y = \frac{1}{2}(a_{21} + a_{12})x + a_{22}y + \frac{1}{2}(a_{23} + a_{32})z \\ \alpha''_z = \frac{1}{2}(a_{31} + a_{13})x + \frac{1}{2}(a_{32} + a_{23})y + a_{33}z. \end{cases}$$

Drückt man die Abhängigkeit des Vektors α vom Ort aus in der Form:

$$\alpha = \alpha_0 + \mathfrak{U}r,$$

so bezeichnet man die a_{ik} der Formel (15) als die Komponenten des Tensors \mathfrak{U} .

Schreibt man $\alpha'' = \mathfrak{X}r$, so sind also die Größen a_{11} ; $\frac{1}{2}(a_{12} + a_{21})$; $\frac{1}{2}(a_{13} + a_{31})$ usw. die Komponenten eines symmetrischen Tensors.

Entsprechend bezeichnet man die u_x, u_y, u_z als die Komponenten eines antisymmetrischen Tensors (vgl. S. 163).

$\varphi = \operatorname{div} \mathfrak{T} =$ hat die Komponenten:

$$(18) \quad \begin{cases} p_x = \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} \\ p_y = \frac{\partial T_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial z} \\ p_z = \frac{\partial T_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \end{cases}$$

$$(19) \quad (\mathfrak{T} \mathfrak{T}) = T_{xx}^2 + T_{yy}^2 + T_{zz}^2 + 2T_{xy}^2 + 2T_{yz}^2 + 2T_{zx}^2.$$

$$(20) \quad |\mathfrak{T}| = T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}.$$

$$|T| = \begin{vmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{vmatrix}.$$

10. Komponenten in Polarkoordinaten (r, φ, ϑ).

$$ds^2 = dr^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2 + r^2 d\vartheta^2; \quad e_1 = 1; \quad e_2 = r \sin \vartheta; \quad e_3 = r;$$

$$(1) \quad g = r^4 \sin^2 \vartheta.$$

3-Indizes-Symbole:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} 33 \\ 1 \end{Bmatrix} &= -r, & \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} &= \frac{1}{r}, & \begin{Bmatrix} 13 \\ 3 \end{Bmatrix} &= \frac{1}{r}, \\ \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} &= -r \sin^2 \vartheta, & \begin{Bmatrix} 22 \\ 3 \end{Bmatrix} &= -\sin \vartheta \cos \vartheta, & \begin{Bmatrix} 23 \\ 2 \end{Bmatrix} &= \operatorname{ctg} \vartheta. \end{aligned}$$

Wir bezeichnen

$$\bar{a}_1 = a_r, \quad \bar{a}_2 = a_\varphi, \quad \bar{a}_3 = a_\vartheta.$$

$\alpha = \operatorname{grad} \psi$:

$$(2) \quad a_r = \frac{\partial \psi}{\partial r}; \quad a_\varphi = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}; \quad a_\vartheta = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta},$$

$$(3) \quad \operatorname{div} \alpha = \frac{\partial a_r}{\partial r} + \frac{2}{r} a_r + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{\operatorname{ctg} \vartheta}{r} a_\vartheta$$

$$= \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r^2 a_r) \right) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta a_\vartheta) \right)$$

$$(4) \quad \Delta \psi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \vartheta^2}$$

$$+ \frac{1}{r^2} \operatorname{ctg} \vartheta \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta}$$

$$(5) \quad = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \right).$$

$$(6) \quad \operatorname{rot}_r \alpha = \frac{1}{r \sin \vartheta} \left(\frac{\partial a_\vartheta}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta a_\varphi) \right)$$

$$(7) \quad \operatorname{rot}_\varphi \alpha = \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \vartheta} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r a_\vartheta)}{\partial r}$$

$$(8) \quad \operatorname{rot}_{\vartheta} \alpha = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r a_{\varphi}) - \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} \right).$$

$$(9) \quad \Delta_r \alpha = \frac{1}{r} \Delta (r a_r) - \frac{2}{r} \operatorname{div} \alpha.$$

Zwischen den a_x, a_y, a_z und den $a_r, a_{\varphi}, a_{\vartheta}$ bestehen die Gleichungen:

$$(10) \quad \begin{cases} a_r = a_x \sin \vartheta \cos \varphi + a_y \sin \vartheta \sin \varphi + a_z \cos \vartheta \\ a_{\varphi} = -a_x \sin \varphi + a_y \cos \varphi \\ a_{\vartheta} = a_x \cos \vartheta \cos \varphi + a_y \cos \vartheta \sin \varphi - a_z \sin \vartheta \end{cases}$$

$$(11) \quad \begin{cases} a_x = a_r \sin \vartheta \cos \varphi - a_{\varphi} \sin \varphi + a_{\vartheta} \cos \varphi \cos \vartheta \\ a_y = a_r \sin \vartheta \sin \varphi + a_{\varphi} \cos \varphi + a_{\vartheta} \sin \varphi \cos \vartheta \\ a_z = a_r \cos \vartheta + a_{\vartheta} \sin \vartheta \end{cases}$$

11. Komponenten in Zylinderkoordinaten (ϱ, φ, z).

$$ds^2 = d\varrho^2 + \varrho^2 d\varphi^2 + dz^2; \quad e_1 = 1, \quad e_2 = \varrho, \quad e_3 = 1.$$

3-Indizes-Symbole:

$$\left\{ \begin{smallmatrix} 22 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} = -\varrho; \quad \left\{ \begin{smallmatrix} 21 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} = 1, \quad \text{alle anderen} = 0.$$

$$(1) \quad g = \varrho^2.$$

Wir bezeichnen:

$$\bar{a}_1 = a_{\varrho}; \quad \bar{a}_2 = a_{\varphi}; \quad \bar{a}_3 = a_z$$

$$(2) \quad \alpha = \operatorname{grad} \psi: \quad \frac{\partial \psi}{\partial \varrho} = a_{\varrho}; \quad \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = a_{\varphi}; \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = a_z.$$

$$(3) \quad \operatorname{div} \alpha = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho a_{\varrho}) + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial a_{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

$$(4) \quad \operatorname{rot}_{\varrho} \alpha = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_{\varphi}}{\partial z}$$

$$(5) \quad \operatorname{rot}_{\varphi} \alpha = \frac{\partial a_{\varrho}}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial \varphi}$$

$$(6) \quad \operatorname{rot}_z \alpha = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial (\varrho a_{\varphi})}{\partial \varrho} - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial a_{\varrho}}{\partial \varphi}$$

$$(7) \quad \operatorname{div} \operatorname{grad} \psi = \Delta \psi = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\varrho \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \varrho} \right) + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

Zwischen den a_x, a_y, a_z und den $a_{\varrho}, a_{\varphi}, a_z$ bestehen die Gleichungen:

$$(8) \quad \begin{cases} a_{\varrho} = a_x \cos \varphi + a_y \sin \varphi \\ a_{\varphi} = -a_x \sin \varphi + a_y \cos \varphi \\ a_z = \end{cases} + a_z.$$

$$(9) \quad \begin{cases} a_x = a_\varphi \cos \varphi - a_\psi \sin \varphi \\ a_y = a_\varphi \sin \varphi + a_\psi \cos \varphi \\ a_z = \end{cases} + a_z.$$

Literatur:

Abraham: Theorie der Elektrizität, Bd. I (Leipzig: B. G. Teubner). — *Gans*: Vektoranalysis. (Leipzig: B. G. Teubner.) — *Runge*: Vektoranalysis (Leipzig: Hirzel).

Pauli (Enzyklopädie d. math. Wiss.): Relativitätstheorie. (Leipzig: B. G. Teubner.) — *Weil*: Zeit, Raum, Materie. (Berlin: Julius Springer.)

Elfter Abschnitt.

Mechanik.

A. Prinzipien der Mechanik.

1. Differentialprinzipien.

a) Newtonsche Bewegungsgleichungen.

Ein unter dem Einflusse einer Kraft $\mathfrak{F} = (X, Y, Z)$ sich bewegender freier Massenpunkt durchläuft in der Zeit t eine Bahn $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, die durch die Differentialgleichung gegeben ist:

$$(1) \quad \left. \begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= X(x, y, z); \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= Y(x, y, z); \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= Z(x, y, z); \end{aligned} \right\} \begin{aligned} m \cdot \mathfrak{B} &= \mathfrak{F} \\ \text{Masse} \times \text{Beschleunigung} &= \text{Kraft.} \end{aligned}$$

Das sind 3 Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die unbekannten Funktionen $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Die 5 in den Lösungen auftretenden Integrationskonstanten sind durch die *Anfangsbedingungen*, etwa durch

$$(2) \quad \begin{aligned} x(t_0) &= x_0; & \dot{x}(t_0) &= u_0, \\ y(t_0) &= y_0; & \dot{y}(t_0) &= v_0, \\ z(t_0) &= z_0; & \dot{z}(t_0) &= w_0 \end{aligned}$$

gegeben.

b) Lagrangesche Bewegungsgleichungen 1. Art.

Ist der Massenpunkt nicht frei beweglich, sondern an irgendwelche Bedingungen gebunden, etwa an eine Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$, oder an eine Kurve $\varphi(x, y, z) = 0$, $\psi(x, y, z) = 0$, so ist die Bewegung bestimmt durch:

$$(1a) \quad \begin{aligned} m \ddot{x} &= X + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial x}, \\ m \ddot{y} &= Y + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ m \ddot{z} &= Z + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial z}. \end{aligned}$$

Das sind zusammen mit den Bedingungsgleichungen $\varphi = 0$, $\psi = 0$ 5 Gleichungen für die unbekannten Funktionen $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ und die unbekannten Konstanten (*Lagrangeschen* Multiplikatoren) λ und μ .

Tritt die Zeit t explizite in den Nebenbedingungen auf, so ist t als Konstante zu behandeln. Bei Vorhandensein von mehreren Massenpunkten gelten die *Lagrangeschen* bzw. *Newtonschen* Bewegungsgleichungen für jeden einzelnen Massenpunkt. Die Beziehungen der einzelnen Massenpunkte zueinander sind durch die Nebenbedingungen festgelegt.

c) Das Prinzip des kleinsten Zwanges (Gauß).

Bewegt sich ein Massenpunkt unter dem Einfluß irgendwelcher treibender Kräfte nicht frei, sondern an die Erfüllung bestimmter Nebenbedingungen gebunden, so ist die wirklich stattfindende Bewegung derart, daß der „Zwang“, den der Massenpunkt durch die Nebenbedingungen erfährt, in jedem Augenblick ein Minimum ist.

Der Zwang ist definiert durch:

$$(3) \quad Z = \frac{1}{m}(m\mathfrak{B} - \mathfrak{E})^2 \equiv \frac{1}{m}\{(m\ddot{x} - X)^2 + (m\ddot{y} - Y)^2 + (m\ddot{z} - Z)^2\}.$$

Sind keine Nebenbedingungen vorhanden, so liefert das *Gaußsche* Prinzip sofort die *Newtonschen*, sind Bedingungen vorhanden, die *Lagrangeschen* Bewegungsgleichungen.

Besteht das System aus mehreren Massenpunkten, so ist der „Zwang“ gleich der Summe der Einzelzwänge zu setzen.

d) Das Prinzip der virtuellen Verrückungen.

Prinzip der virtuellen Verschiebungen. Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten. Prinzip der Statik.

Die notwendige und hinreichende Bedingung für das Gleichgewicht eines beliebigen materiellen Systems besteht darin, daß die Gesamtarbeit der treibenden Kräfte bei jeder *virtuellen*, d. h. mit den Bedingungen des Systems verträglichen Verrückung gleich Null ist.

$$(4) \quad \sum \mathfrak{E}_i \delta \mathfrak{R}_i \equiv \sum X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i = 0.$$

Es ist zu summieren über sämtliche Massenpunkte. Sind die Bedingungen zwischen den einzelnen Massenpunkten durch die Bedingungsgleichungen $\varphi^{(h)}(x_i, y_i, z_i) = 0$ gegeben, so bedeutet das für die zulässige virtuelle Verrückung:

$$(5) \quad \sum_i \frac{\partial \varphi^{(h)}}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial \varphi^{(h)}}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial \varphi^{(h)}}{\partial z_i} \delta z_i = 0$$

und somit folgt als Gleichgewichtsbedingung:

$$(6) \quad X_i - \left(\lambda_1 \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial x_i} + \dots \right) = 0,$$

.....

worin $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ konstante *Lagrangesche* Multiplikatoren sind. — $\lambda_i \frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial x_i}$ ist die x_i -Komponente der „Zwangskraft“, die der Bedingungsgleichung $g^{(k)} = 0$ äquivalent ist.

e) Das Prinzip von d'Alembert

führt die Behandlung dynamischer Probleme auf die Statik zurück, indem das negativ genommene Produkt aus Masse und Beschleunigung als „*Trägheitskraft*“ eingeführt und wie eine treibende Kraft behandelt wird. Es wird verlangt, daß in jedem Augenblick Gleichgewicht zwischen sämtlichen Kräften herrscht, wofür das Prinzip der virtuellen Verrückungen die notwendige und hinreichende Bedingung gibt:

$$(7) \quad \left. \begin{aligned} \sum \left(\mathfrak{R} - m_i \frac{d^2 s_i}{dt^2} \right) \delta s_i &= 0, \\ \sum (X_i - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i &= 0, \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\}$$

Man bezeichnet die Differenz $\mathfrak{R} - m \frac{d^2 s}{dt^2}$ auch als „verlorene (nicht in Bewegung umgesetzte) Kraft“ und spricht das *d'Alembertsche* Prinzip so aus: Bei der wirklich eintretenden Bewegung ist die virtuelle Arbeit (= Kraft \times Weg) der verlorenen Kräfte gleich Null.

Sind keine Nebenbedingungen vorhanden, so ist das *d'Alembertsche* Prinzip mit den *Newtonschen* Bewegungsgleichungen, sind Bedingungen vorhanden, so ist es mit den *Lagrangeschen* Gleichungen identisch. Explizite auftretendes t ist als Konstante zu behandeln.

2. Integralprinzipien.

a) Das Prinzip von Hamilton.

Von allen Bewegungen, die mit den Rand- und Nebenbedingungen eines mechanischen Problems verträglich sind, ist die wirklich stattfindende Bewegung die, die das Integral

$$(8) \quad \int_1^2 (T - W) dt$$

zum Minimum macht. Darin bedeutet T die kinetische, W die potentielle Energie. $T - W = L$ heißt die „*Lagrangesche* Funktion“.

Dieses Variationsproblem liefert drei Differentialgleichungen 2. Ordnung, Es sind die „*Lagrangeschen Gleichungen 2. Art*“ (vgl. S. 192):

$$(9) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

.
.

Das *Hamiltonsche Prinzip* ist das allgemeinste und am weitesten reichende Grundprinzip der Mechanik. Es gilt für eine beliebige Zahl von Massenpunkten und für eine beliebige Zahl von Freiheitsgraden. Die Zeit t kann sowohl ein Potential U wie auch in den etwa vorhandenen Nebenbedingungen explizite auftreten. Es ist nicht wie die anderen Integralprinzipie an die Gültigkeit des Energiesatzes gebunden. Das Vorhandensein von Nebenbedingungen bietet keinerlei Schwierigkeit. Es tritt in diesem Falle in den *Lagrangeschen Gleichungen* $L + \lambda \varphi$ an die Stelle von L . (Vgl. Variationsrechnung.)

b) Das Prinzip der kleinsten Wirkung.

Das Prinzip der kleinsten Aktion. Das Prinzip von *Euler*.

Bei der wirklich stattfindenden Bewegung wird das Integral $\int_0^t T dt$ ein Minimum, verglichen mit allen anderen mit den Bedingungen verträglichen Bewegungen von der gleichen Energie E . Ausgangs- und Endpunkt, sowie Ausgangszeit werden bei der Variation festgehalten, die Endzeit dagegen nicht.

Das *Eulersche Prinzip* ist nicht auf das *Hamiltonsche* zurückführbar. Es gilt nur für konservative Systeme. Die gewöhnlichen Methoden der Variationsrechnung sind nicht anwendbar, da die obere Grenze offen ist.

Als „*Prinzip der kleinsten Wirkung*“ („*Aktion*“) wird auch häufig das *Hamiltonsche* bezeichnet.

c) Das Prinzip von Jacobi.

Findet unter dem Einflusse konservativer Kräfte (d. h. $T + W = \text{Const} = E$) zwischen den festen Punkten x_0, y_0, z_0 und x_1, y_1, z_1 eine Bewegung statt, so macht die wirklich durchlaufene Bahnkurve das Integral

$$(10) \quad \int_{x_0, y_0, z_0}^{x_1, y_1, z_1} \sqrt{E - W(x, y, z)} ds$$

zum Minimum. Durch dieses Variationsprinzip ist die Bahnkurve eindeutig bestimmt. Der zeitliche Ablauf der Bewegung folgt dann aus dem Energiesatz $T + W = \text{Const} = E$.

d) Die kanonischen Bewegungsgleichungen (Hamilton).

Tritt im Potential U die Zeit t nicht explizite auf, so lassen sich die *Lagrangeschen* Gleichungen 2. Art auch schreiben:

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial H(p, q)}{\partial q_i} \\ \frac{dq_i}{dt} = -\frac{\partial H(p, q)}{\partial p_i} \end{cases}$$

Darin bedeuten die q_i die $3n$ „generalisierten Lagekoordinaten“ (n Anzahl der Freiheitsgrade), die p_i die dazugehörigen „generalisierten Impulse“, definiert durch $p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$ (wofür man, da das Potential eine reine Ortsfunktion ist, auch schreiben kann: $p_i = \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_i}$ oder $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$). $H(p, q)$ ist die *Energiefunktion*

$$(12) \quad H(p, q) \equiv T(p_1 \dots p_n, q_1 \dots q_n) + W(q_1 \dots q_n) \quad (\text{vgl. S. 192}).$$

e) Die Jacobische partielle Differentialgleichung.

Die Lösung der kanonischen Gleichungen gelingt oft bequem auf dem Wege über die *Jacobische Differentialgleichung*

$$(13) \quad \frac{\partial S(q_1 \dots q_n)}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, q_1 \dots q_n\right) = 0;$$

die man bekommt, wenn man in der Energiefunktion $H(p, q)$ die p_i bzw. durch $\frac{\partial S}{\partial q_i}$ ersetzt. Kennt man eine Lösung $S(q_1 \dots q_n, \alpha_1 \dots \alpha_n, t)$ der *Jacobischen* Differentialgleichung, so findet man die allgemeine Lösung der kanonischen Gleichung, indem man bildet: $\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i$ und aus diesen n Gleichungen die q_i durch α, β und t ausdrückt. Da außerdem $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$ ist, so sind die $2n$ Integrationskonstanten α, β durch die $2n$ Anfangsbedingungen $q_1^0, \dots, q_n^0, p_1^0, \dots, p_n^0$ bestimmt. Die *Jacobische* Funktion S gibt den Wert des *Hamiltonschen* Integrals als Funktion des im Laufe der wirklich stattfindenden Bewegung erreichten Ortes. S heißt die „*Wirkungsfunktion*“.

B. Mechanik des einzelnen Massenpunktes.

1. Grundgesetz und Begriffe.

Zur Darstellung der Bewegung eines Massenpunktes benutzt man folgende Punktvektoren¹⁾:

Lage \mathbf{r} (Komponenten x^i).

Geschwindigkeit $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (v^i = \frac{dx^i}{dt})$

Beschleunigung $\mathbf{b} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \quad (b^i = \frac{d^2x^i}{dt^2} + \left\{ \begin{smallmatrix} h \\ i \end{smallmatrix} \right\} \frac{dx^h}{dt} \frac{dx^i}{dt})$.

Ist \mathbf{f} der Vektor der Kraft und m die Masse des Punktes, so lautet das *dynamische Grundgesetz* (Newton)

$$(1) \quad \mathbf{f} = m\mathbf{b} = m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \quad (k^i = mb^i)$$

$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ heißt *Impuls* oder *Bewegungsgröße*.

Daher

$$(2) \quad \mathbf{f} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad \left(k^i = \frac{dp^i}{dt} + \left\{ \begin{smallmatrix} h \\ i \end{smallmatrix} \right\} \frac{p^h p^i}{m} \right)$$

Zerlegt man die Beschleunigung in Radial- und Tangentialbeschleunigung $\mathbf{b} = \mathbf{b}_r + \mathbf{b}_t$, so wird

$$\mathbf{b}_r = \frac{\mathfrak{R}}{R^2} v^2 = \frac{[\mathbf{v}(\mathbf{b}\mathbf{v})]}{v^2}, \quad \mathbf{b}_t = \frac{\mathfrak{T}}{T} \frac{dv}{dt} = \frac{\mathbf{v}(\mathbf{b}\mathbf{v})}{v^2} = \frac{\mathbf{v}}{v} \frac{dv}{dt}.$$

Dabei bedeutet \mathfrak{R} einen Vektor von Richtung und Betrag des Krümmungsradius der Bahn, \mathfrak{T} einen Vektor in Richtung der Bahntangente.

— $m\mathbf{b}_r$ heißt *Zentrifugalkraft*.

$$(3) \quad dA = (\mathbf{f}\mathbf{v}) \cdot dt = (\mathbf{f} \cdot d\mathbf{r})$$

heißt die bei der Verschiebung geleistete *Arbeit*

$$dA = (k_i v^i) dt = k_i dx^i$$

Es ist

$$dA = m \left(\frac{dv}{dt} \cdot \mathbf{v} \right) \cdot dt = \frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{2} \right) dt = dT$$

$$dT = (\mathbf{p} d\mathbf{v}), \quad p_i = \frac{\partial T}{\partial v^i}.$$

$T = \frac{mv^2}{2}$ heißt *kinetische Energie*

$$(4) \quad T = \frac{m}{2} (v^i v_i) = \frac{m}{2} (v^i v^h g_{ih}).$$

¹⁾ Im affinen Koordinatensystem wird $x^i = r^i$, d. h. nur in solchen sind die x^i die Komponenten des Vektors \mathbf{r} in Richtung vom Nullpunkt zum Aufpunkt. Dagegen sind allgemein die dx^i die Komponenten von $d\mathbf{r}$.

Ist \mathfrak{f} als Funktion des Ortes gegeben und darstellbar in der Form

$$\mathfrak{f} = \text{grad } U = - \text{grad } W \quad \left(k_i = \frac{\partial U}{\partial x^i} = - \frac{\partial W}{\partial x^i} \right),$$

wo U bzw. W ein von v unabhängiger Skalar ist, so heißt U die *Kräftefunktion* und $W = -U$ die *potentielle Energie*. Ist U auch von t unabhängig, so heißt eine solche Kraft \mathfrak{f} *konservativ*. Dann gilt.

$$(5) \quad \begin{aligned} dA &= dU = -dW = dT \\ d(T + W) &= 0 \quad (\text{Erhaltung der Energie}). \end{aligned}$$

2. Verschiedene Formen des Grundgesetzes.

In kovarianter Schreibweise mit Benutzung der Fundamentalvektoren (S.171) wird für obige Größen

$$\begin{aligned} dx &= e_i dx^i, & v &= e_i v^i, & p &= mv = m v^i e_i \\ \mathfrak{f} &= k^h e_h, & dU &= (\mathfrak{f} d\mathfrak{s}) = k^h dx^i (e_i e_h), \end{aligned}$$

also

$$\frac{\partial U}{\partial x^i} = k^h (e_i e_h) = k_i.$$

Die Grundgleichung der Mechanik heißt dann

$$m \frac{dv}{dt} = m \left(\frac{dv^i}{dt} e_i + v^i \frac{de_i}{dt} \right) = k^i e_i = \mathfrak{f},$$

also nach Multiplikation mit e_k

$$m \left\{ \frac{dv^i}{dt} (e_i e_k) + v^i \left(e_k \frac{de_i}{dt} \right) \right\} = \frac{dU}{dx^k},$$

während die kinetische Energie T dargestellt wird durch

$$(1) \quad 2T = m v^i v^h (e_i e_h) = v^i p_i.$$

Diese Schreibweise gestattet die Gleichungen sofort in einem fließenden d. h. einem willkürlich zeitlich veränderlichen Koordinatensystem zu schreiben. In einem solchen gilt:

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{de_i}{dt} = \frac{\partial e_i}{\partial t} + v^h \frac{\partial e_i}{\partial x^h}, & v^i = u^i + \frac{dx^i}{dt} \\ e_h \frac{\partial u^h}{\partial x^i} = \frac{\partial e_i}{\partial t}, \end{cases}$$

Dabei bedeutet u die Strömungsgeschwindigkeit des Koordinatensystems, $\frac{de_i}{dt}$ bzw. $\frac{\partial e_i}{\partial t}$ die Änderung der Vektoren e_i mit der Zeit im Massenzentrum bzw. an einem festen Ort, so daß für $x^i = \text{const}$ wird

$$e_h \frac{\partial v^h}{\partial x^i} = \frac{\partial e_i}{\partial t}.$$

Daher wird¹⁾

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} \Big|_{\dot{x}'} &= m \left\{ v^i v^h \left(e_i \frac{\partial e_h}{\partial x^i} \right) + v^i (e_i e_h) \frac{\partial v^h}{\partial x^i} \right\} = m v^i \left(e_i \frac{d e_i}{d t} \right) \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} \Big|_{x'} &= m v^i (e_i e_i) = m v_i = p_i \\ \frac{d}{d t} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} &= m \left\{ \frac{d v^i}{d t} (e_i e_i) + v^i \left(e_i \frac{d e_i}{d t} + e_i \frac{d e_i}{d t} \right) \right\}.\end{aligned}$$

Die Grundgleichung der Mechanik schreibt sich daher in einem willkürlichen, eventuell auch zeitlich veränderlichen Koordinatensystem

$$(3) \quad \frac{d}{d t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} \right) - \frac{\partial T}{\partial x^i} = \frac{\partial U}{\partial x^i},$$

oder bei Einführung des „kinetischen Potentials“ (*Lagrangesche Funktion*) $L = T + U$

$$(4) \quad \frac{d}{d t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) = \frac{\partial L}{\partial x^i} \quad (= \frac{d p_i}{d t}) \quad (\text{Lagrangesche Gleichungen}).$$

Nun gilt²⁾ aber

$$\frac{\partial T}{\partial x^i} \Big|_{\dot{x}'} = \frac{\partial T}{\partial x^i} \Big|_{x'} + p_i \frac{\partial u^i}{\partial x^i}; \quad \frac{\partial T}{\partial x^i} \Big|_{x'} = - \frac{\partial T}{\partial x^i} \Big|_{v_r}; \quad \frac{\partial U}{\partial x^i} \Big|_{x'} = \frac{\partial U}{\partial x^i} \Big|_{v_r},$$

also geht die *Lagrangesche Form* über bei Einführung von

$$H = T - U - p_i u^i = p_i \dot{x}^i - (T + U)^3)$$

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d p_i}{d t} = - \frac{\partial H}{\partial x^i} \Big|_{p_r} \\ \text{und} \\ \frac{d x^i}{d t} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \Big|_{x'} \end{array} \right. \quad (\text{Hamiltonsche kanonische Gleichungen}),$$

¹⁾ Die Schreibweise bedeutet, daß hier T als Funktion der x^i und \dot{x}^i (also nicht etwa der v_i) betrachtet werden soll.

²⁾
$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial x^i} \Big|_{x'} &= v^i v^h \left(e_i \frac{\partial e_h}{\partial x^i} \right) = m v_i v^h \left(e_i \frac{\partial e_h}{\partial x^i} \right), \\ \frac{\partial T}{\partial x^i} \Big|_{v_r} &= m v_i v^h \left(e_h \frac{\partial e^i}{\partial x^i} \right) = m v_i v^h \left(e_h \frac{\partial e^i}{\partial x} \right)\end{aligned}$$

wobei wegen $(e^i e_h) = 0$ für $i \neq h$ bzw. $= 1$ für $i = h$ gilt

$$e^i \frac{\partial e_h}{\partial x^i} = - e_h \frac{\partial e^i}{\partial x^i}.$$

³⁾ Für $u^i = 0$ ist $H = T - U = T + W$ die Energie und $\frac{d H}{d t} = 0$.

wobei die letzte Gleichung folgt aus

$$2 T = p_i v^i, \quad v^i - u^i = \frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial T}{\partial p_i} \Big|_{x^r} - u^i = \frac{\partial (T - U - u^i p_i)}{\partial p_i} \Big|_{x^r}.$$

Die Größen x^i und p_i (nicht $p^i = m \frac{dx^i}{dt}$) heißen *generalisierte* Lagen- und Impulskoordinaten. Meist findet man statt x^i die Schreibweise q_i .

Setzt man $S = \int_{t_0}^t L dt$ (*Wirkungsfunktion*), wo das Integral längs einer Bahn erstreckt und S als eine Funktion der x^i , der Zeit t und von Konstanten betrachtet sei, so wird:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_0}^t \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} \delta x^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \delta \dot{x}^i \right) dt + \frac{\partial S}{\partial t} \delta t \\ &= \int_{t_0}^t \left(\left(\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) \right) \delta x^i + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \delta x^i \right) \right) dt + \frac{\partial S}{\partial t} \delta t \\ &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \delta x^i + \frac{\partial S}{\partial t} \delta t = p_i \delta x^i + \frac{\partial S}{\partial t} \delta t, \end{aligned}$$

also:

$$\frac{\partial S}{\partial x^i} \Big|_t = p_i,$$

ferner

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= L = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + p_i (v^i - u^i) \\ &= \frac{\partial S}{\partial t} + 2 T - p_i u^i = \frac{\partial S}{\partial t} + H + L, \end{aligned}$$

also:

$$(6) \quad \frac{\partial S}{\partial t} + H \left(t, x^i, \frac{\partial S}{\partial x^i} \right) = 0 \quad (\text{Hamilton-Jacobische Gleichung}).$$

Es sei aus dieser Differentialgleichung S bestimmt als Funktion von t , x^i und Integrationskonstanten α_i , unter denen sich, falls H von t unabhängig ist, die Energiekonstante $h = -\frac{\partial S}{\partial t}$ befindet. Setzt man

$A = S + h(t - t_0)$ und $\frac{\partial A}{\partial \alpha_i} = \beta_i$, wo die β_i neue Konstanten sein sollen, und nimmt man diese so, daß die Anfangsbedingungen erfüllt sind, so liefert die letzte Gleichung die Bahnkurve in der Form:

$$x^i = f_i(t, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots).$$

Zentralkraft.

Ist

$$\mathbf{f} \parallel \mathbf{r}, \quad \text{also} \quad [\mathbf{r}] = 0 \quad (\text{Zentralkraft}),$$

so ist

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{r} \mathbf{v}] = 0 \quad (\text{Flächensatz}).$$

Der Spezialfall der *Planetenbewegung* läßt sich vektoriell folgendermaßen behandeln:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -C \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (\text{Newtonsches Attraktionsgesetz}).$$

Aus dem Flächensatz folgt:

$$[\mathbf{r} \dot{\mathbf{r}}] = \mathbf{f} \quad (\mathbf{f} \text{ ein konstanter Vektor}).$$

Wir finden weiter:

$$(\mathbf{r} \mathbf{f}) = 0,$$

d. h. Bewegung in einer Ebene.

$$\begin{aligned} [\ddot{\mathbf{r}} \mathbf{f}] &= [\ddot{\mathbf{r}} [\mathbf{r} \dot{\mathbf{r}}]] = -\frac{C}{r^3} [\mathbf{r} [\mathbf{r} \dot{\mathbf{r}}]] \\ &= -\frac{C}{r^3} (\mathbf{r} (\mathbf{r} \dot{\mathbf{r}}) - \dot{\mathbf{r}} r^2) = -\frac{C}{r^3} \left(\frac{r}{2} \frac{dr^2}{dt} - \dot{\mathbf{r}} r^2 \right) \\ &= C \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) = \frac{d}{dt} [\dot{\mathbf{r}} \mathbf{f}]. \end{aligned}$$

Also:

$$[\dot{\mathbf{r}} \mathbf{f}] = C \frac{\mathbf{r}}{r} + \mathbf{a}.$$

\mathbf{a} spielt die Rolle einer Integrationskonstanten. Es ist:

$$(\mathbf{a} \mathbf{f}) = 0$$

$$(\mathbf{r} [\dot{\mathbf{r}} \mathbf{f}]) = C r + (\mathbf{a} \mathbf{r}) = (\mathbf{f} [\mathbf{r} \dot{\mathbf{r}}]) = h^2,$$

also:

$$r = \frac{h^2}{C + a \cos(a, \mathbf{r})}.$$

Das ist die Gleichung eines Kegelschnittes. Der Vektor \mathbf{a} gibt uns die Richtung der großen Achse, er weist vom Brennpunkt zum Perihel.

Für den Geschwindigkeitsvektor ergibt sich folgende interessante Darstellung:

$$[\mathbf{f} [\mathbf{r} \dot{\mathbf{r}}]] = \dot{\mathbf{r}} h^2 - \mathbf{f} (\dot{\mathbf{r}} \mathbf{f}) = \dot{\mathbf{r}} h^2 = [\dot{\mathbf{r}}] \frac{C}{r} + [\dot{\mathbf{r}} \mathbf{a}],$$

also:

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{[\dot{\mathbf{r}} \mathbf{a}]}{h^2} + \frac{C}{h^2} \frac{[\mathbf{f} \mathbf{r}]}{r}.$$

Die Geschwindigkeit läßt sich also in jedem Punkte der Bahn zusammensetzen aus zwei ihrem Betrage nach konstanten Vektoren;

der eine steht immer senkrecht zur großen Achse, der andere senkrecht zum Radiusvektor.

Bezüglich einer koordinatenmäßigen Verfolgung der Planetenbewegung vgl. S. 97.

Zwangskräfte.

Wirken auf einen Massenpunkt *Zwangskräfte* \mathfrak{z}_a (Komponenten $z_{a\tau}$), d. h. ist seine Bewegung durch Bedingungsgleichungen $f_a(x^1, x^2, x^3) = 0$ beschränkt¹⁾, so gilt:

$$(7) \quad m \mathfrak{b} = \mathfrak{t} + \sum_a \mathfrak{z}_a.$$

Die Arbeit der Zwangskräfte verschwindet. $\sum_a (\mathfrak{z}_a d\mathbf{r}) = 0$, d. h. \mathfrak{z}_a steht senkrecht auf der Fläche $f_a(x^1, x^2, x^3) = 0$, also

$$z_{a\tau} = \lambda_a \cdot \frac{\partial f_a}{\partial x^\tau}(x^1, x^2, x^3).$$

Die Bewegungsgleichung lautet daher:

$$(8) \quad (k_\tau - m b_\tau) + \sum_a \lambda_a \frac{\partial f_a}{\partial x^\tau}(x^1, x^2, x^3) = 0 \quad (3 \text{ Gleichungen}),$$

und

$$f_a(x^1, x^2, x^3) = 0 \quad (\alpha \text{ Gleichungen}).$$

Die λ_a sind hieraus zu eliminieren.

C. Systeme von Massenpunkten.

1. Allgemeines.

Das System bestehe aus N Massenpunkten.

Die Massen m_a seien Kräften \mathfrak{t}_a unterworfen. Außerdem mögen sie aufeinander Zentralkräfte $\mathfrak{t}_{a\beta}$ ausüben.

Dann gilt für jeden Massenpunkt:

$$(1) \quad m \mathfrak{b}_a = \mathfrak{t}_a + \sum_\beta \mathfrak{t}_{a\beta} \quad \alpha \neq \beta.$$

Hierbei ist

$$\mathfrak{t}_{\beta a} = - \mathfrak{t}_{a\beta} \quad (\text{actio-reactio}).$$

Die Arbeit der Kräfte wird

$$(2) \quad \begin{aligned} dA &= \sum_a (\mathfrak{t}_a d\mathbf{r}_a) + \sum_a \sum_\beta (\mathfrak{t}_{\beta a} d\mathbf{r}_a) \\ &= \sum_a (\mathfrak{t}_a d\mathbf{r}_a) + \frac{1}{2} \sum_a \sum_\beta (\mathfrak{t}_{\beta a} (d\mathbf{r}_a - d\mathbf{r}_\beta)). \end{aligned}$$

¹⁾ Bedingungsgleichungen, die in der Form $f_a(x^1, x^2, x^3) = 0$ gegeben sind, heißen *holonom*. Sind sie durch eine nicht integrable totale Differentialgleichung $L dx^1 + M dx^2 + N dx^3 = 0$ gegeben, so heißen sie *nicht holonom*.

Sind die Kräfte \mathfrak{t}_α bzw. $\mathfrak{t}_{\alpha\beta}$ teilweise Zwangskräfte, d. h. durch Bedingungsgleichungen ersetzbar, so verschwindet ihr Anteil in dA .

Die Bedingungsgleichungen für die $\mathfrak{t}_{\alpha\beta}$ haben die Form:

$$\begin{aligned} f(x_\alpha^1, x_\alpha^2, x_\alpha^3, x_\beta^1, x_\beta^2, x_\beta^3) &= 0, \\ [\mathfrak{t}_{\alpha\beta}, d(r_\alpha - r_\beta)] &= 0, \\ (x_{\alpha\beta})_i &= \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x_\alpha^i} - \frac{\partial f}{\partial x_\beta^i} \right) \quad \text{im affinen Koordinatensystem),} \\ (3) \quad [\mathfrak{t}_{\alpha\beta} d r_\alpha] &= [\mathfrak{t}_{\alpha\beta} d r_\beta]. \end{aligned}$$

2. Formale Zurückführung auf die Dynamik eines Massenpunktes.

Die Dynamik eines Systems von N Massenpunkten im 3-dimensionalen Raum kann formal auf die eines einzelnen im 3 N -dimensionalen zurückgeführt werden.

Die *Lagrangeschen* Gleichungen lassen sich dann schreiben:

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial v^i} \right) - \frac{\partial \bar{T}}{\partial x^i} = \frac{\partial \bar{U}}{\partial x^i}, \quad \text{wo} \quad \bar{T} = \sum_n T_n, \quad \bar{U} = \sum_n U_n.$$

Dabei ist es durchaus nicht notwendig, daß die x^i bzw. p_i für alle Massen auf das gleiche Koordinatensystem bezogen werden. Man kann z. B. so vorgehen, daß man zunächst einen Massenpunkt auszeichnet und auf ein festes oder bewegtes System bezieht, sodann den zweiten auf ein solches, welches relativ zum ersten ruht, den dritten auf eines, in dem die beiden ersten ruhen, also auf ein fließendes usw. Für alle Massenpunkte gelten dann unverändert die *Lagrangeschen* oder *Hamiltonschen* Gleichungen.

Ebenso wie die 3 auf einen Massenpunkt sich beziehenden *Lagrangeschen* Gleichungen in ihrer Form ungeändert bleiben, wenn man zu andern Koordinaten übergeht, so bleibt das System der 3 n Gleichungen in seiner Form erhalten, wenn wir an Stelle der x^i neue $x^{i'}$ einführen, die beliebige voneinander unabhängige Funktionen der x^i sind:

$$x^{i'} = f_i(x^1, x^2, x^3 \dots x^{3n}),$$

Die 3 n $x^{i'}$ sind dann als Parameter des gesamten Systems aufzufassen.

Bestehen zwischen den x^i α unabhängige Bedingungsgleichungen, so kann man α Koordinaten eliminieren. Es empfiehlt sich dann durch eine Transformation zu neuen Koordinaten $x^{i'}$ überzugehen, derart, daß die α Bedingungsgleichungen durch α Gleichungen der Form $x^{i'} = \text{const}$ ersetzt werden.

Die Zahl $Z = 3N - \alpha$, d. h. die Zahl der zur Beschreibung der Anordnung aller Teile erforderlichen Variablen heißt die „Zahl der Freiheitsgrade“ des Systems. Für ein System von 3 und mehr starr verbundenen Massenpunkten ist $Z = 6$.

3. Grundlagen der statistischen Mechanik.

Die $6N$ -Größen x^i und p_i definieren den Zustand aus den N Punkten bestehenden Systems eindeutig. Benutzt man diese Größen als *Cartesische* Koordinaten, so veranschaulichen sie den Lage- und Bewegungszustand des Systems durch einen Punkt in einem $6N$ -dimensionalen Raum (*Phasenraum*).

Die zeitliche Änderung dieses Zustandes wird durch eine Kurve dargestellt. Für diese gilt:

$$(1) \quad \frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial p_i}; \quad \frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial \bar{H}}{\partial x^i},$$

wo $\bar{H} = \bar{T} - \bar{U}$ eine skalare Funktion von x^i und p_i ist. Diese Kurve geht durch jeden Punkt des Raumes in einer bestimmten Richtung, kann sich also nicht selbst schneiden.

In der *statistischen Mechanik* betrachtet man eine große Zahl solcher Systeme, die durch die gleiche Funktion \bar{H} bestimmt werden. Jedes System wird dann durch einen Punkt im Phasenraum dargestellt, deren Gesamtheit sich über den Phasenraum verteilt.

Faßt man eine Anzahl derselben ins Auge, die ein gewisses Volumen des Phasenraumes erfüllen, so erfüllen sie nach einiger Zeit ein Volumen derselben Größe (*Liouvillescher Satz*). Man kann dann die Phasenpunkte als ein strömendes Kontinuum auffassen, für welches $\text{div } v = 0$ ist. Ist die Verteilungsdichte ϱ der Phasenpunkte derartig, daß die Strömungsrichtung überall senkrecht auf dem Gradienten der Funktion H steht, so wird $\frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0$, d. h. ϱ ist dann nur eine Funktion von $H(p, q)$. Man spricht dann von *statistischem Gleichgewicht*.

Für ein abgeschlossenes System ist die Kurve im Phasenraum durch die Energiegleichung $E = \text{const}$ auf eine Hyperfläche beschränkt. Zu der räumlichen Dichte $\varrho = \text{const}$ auf dieser Fläche gehört die „Flächendichte“

$$(2) \quad \sigma = \frac{\text{const}}{\sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial x^1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial E}{\partial p_1}\right)^2 + \dots}}$$

Die „*Ergodenhypothese*“ behauptet, daß der Phasenpunkt durch jeden Punkt dieser Hyperfläche hindurchgeht oder ihm wenigstens beliebig nahekommt. Gilt diese Hypothese, so verlangt der *Liouvillesche Satz*, daß die Phasenpunkte in langen Zeiträumen im Durchschnitt sich

in gleichgroßen Flächenteilen proportional den Zeiten $\text{Const} \cdot \sigma$ aufhalten. Die exakte Gültigkeit der Ergodenhypothese ist zweifelhaft.

Für ein nicht abgeschlossenes System fällt die Beschränkung auf die Hyperfläche $E = \text{const}$ fort. Nach *Gibbs* ist dann $\varrho = f(E)$ spe-

ziell gleich $\varrho = N e^{\frac{F-E}{kT}}$, wo N die Zahl der betrachteten Systeme, T die gemeinsame Temperatur, k die *Boltzmannsche* Konstante und F die freie Energie bedeutet (vgl. S. 248 ff.).

Es ist $\int \varrho \cdot d\omega = N$, wo $d\omega$ ein Differential des Phasenraumes ist, also

$$e^{-\frac{F}{kT}} = \int e^{-\frac{E}{kT}} d\omega; \quad F = -kT \ln \int e^{-\frac{E}{kT}} d\omega = -kT \ln Z.$$

Das Integral $Z = \int e^{-\frac{E}{kT}} d\omega$ heißt „Zustandsintegral“.

Zerlegt man den Phasenraum in einzelne Schichten zwischen E und $E + dE$ vom Volumen $d\omega = V(E) dE$, so wird:

$$(3) \quad Z = \int e^{-\frac{E}{kT}} V(E) dE = \int J dE.$$

Der Integrand hat ein stark hervortretendes Maximum für einen Wert $E = E_0$. Hier ist

$$\frac{\partial \ln J_0}{\partial E} = 0, \quad \frac{\partial^2 \ln J_0}{\partial E^2} = -h, \quad h > 0.$$

Da das Integral $\int J dE$ nur in der Umgebung des Maximums einen nennenswerten Beitrag liefert, kann man h konstant setzen, und es wird daher mit großer Annäherung:

$$(4) \quad F = E_0 - kT \left(\ln V_0 + \ln \sqrt{\frac{2\pi}{h}} \right).$$

In $\sqrt{\frac{2\pi}{h}}$ kann man vernachlässigen gegen $\ln V_0$. Daraus folgt

$$(5) \quad k \ln V_0 = \frac{E_0 - F_0}{T} = S_0 = \text{Entropie}.$$

Da V_0 die statistische Wahrscheinlichkeit für den Zustand des Systems angibt (vgl. S. 269), welches bei der Temperatur T die Energie E_0 hat, ist $S = k \ln V_0$ die *Boltzmannsche* Beziehung zwischen Entropie und Wahrscheinlichkeit.

4. Gleichgewichtslagen und Schwingungen.

Sind für ein bestimmtes Wertesystem x^i alle $\frac{\partial U}{\partial x^i} = 0$, so besteht Gleichgewicht und man kann U in der Nachbarschaft dieser Stelle darstellen in der Form:

$$(1) \quad U = U_0 + \sum_i \frac{(x^i - x_0^i)^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^{i2}} + \sum_i \sum_k (x^i - x_0^i)(x^k - x_0^k) \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^i \partial x^k} + \dots$$

d. h. $U - U_0 = x^i x^k \frac{A_{ik}}{2}$ (unter Fortlassung der \sum -Zeichen), wenn man x_0^i als neuen Nullpunkt wählt. Dann gilt (in Cartesischen Koordinaten):

$$(2) \quad m_i \frac{d^2 x^i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x^i} = x^k A_{ik}.$$

Setzt man hierin

$$x^i = a^i e^{\frac{\omega t}{\sqrt{m_i}}},$$

so wird

$$x^i \omega^2 = x^k A_{ik},$$

d. h. man erhält ein System von $3N$ homogenen linearen Gleichungen (vgl. S. 3).

Durch Nullsetzen der Determinante erhält man eine Gleichung $3N$ -ten Grades für ω^2 .

Transformiert man die x^i wie in S. 5 in die neuen Koordinaten x^i , so heißen diese „Normalkoordinaten“.

Stabil ist der durch $x^i = x_0^i$ gegebene Gleichgewichtszustand bzw.

der durch $x^i = a^i e^{\frac{\omega t}{\sqrt{m_i}}}$ gegebene Schwingungszustand nur, wenn die Gleichung für ω^2 nur negativ reelle Wurzeln hat.

D. Starrer Körper.

Ein Massenpunktsystem bestehend aus starr miteinander (durch Zwangskräfte) verbundene Massen m_a heißt ein starrer Körper.

Die Geschwindigkeiten v_a seiner Punkte sind dann durch zwei freie Vektoren¹⁾ v_0 und u darstellbar:

$$(1) \quad v_a = v_0 + [u r_a] \quad (v_a^i = v_0^i + u_k^i x_a^k, \quad u^{ik} = -u^{ki}).$$

r_a ist der Ortsvektor von einem mit dem Körper starr verbundenen Nullpunkt aus.

v_0 ist die Geschwindigkeit des Punktes $r=0$.

u ist die Drehgeschwindigkeit um die durch $r=0$ gehende Achse $\parallel u$.

¹⁾ Es sollen nur affine (d. h. gradlinig äquidistante) Koordinaten in Frage kommen, da nur in solchen die Komponenten der freien Vektoren vom Ort unabhängig sind.

Verschiebt man das Bezugssystem im Körper um die Strecke a ($r' = r - a$), so wird $v = v_0 + [u a] + [u, r - a] = v_0' + [u r']$, d. h. die Drehgeschwindigkeit u ist unabhängig von der Wahl des Bezugssystems.

Wählt man speziell $a = \frac{[u v]}{u^2}$, so wird

$$v_0' = \frac{u(uv)}{u^2}, \quad \text{d. h. } v_0' \parallel u.$$

Die Bewegung ist also als reine *Schraubung* darstellbar. Die Achse durch den neuen Nullpunkt ($r' = 0$) heißt *instantane Drehachse*.

Weitere wichtige Vektoren sind:

- (2) $p = \sum_a m_a v_a$ der *Gesamtimpuls* $p^i = \sum m v^i$
 (3) $q = \sum_a m_a [r_a v_a]$ der gesamte *Drehimpuls* $q^{ik} = \sum m (x^i v^k - x^k v^i)$
 $q^{ik} = -q^{ki}$.

Die kinetische Energie $T = \sum \frac{m}{2} v^2$ ist dann darstellbar durch:

$$(4) \quad 2T = (v_0 p) + (u q) = (v^i p_i + u^{ik} q_{ik}).$$

Schwerpunkt heißt der Punkt, für den als Nullpunkt ($r = 0$) $\sum m r = 0$ wird.

$$(5) \quad M = \sum_a m_a \text{ heißt Gesamtmasse,}$$

$$(6) \quad J_u = \sum_a m \frac{[ur]^2}{u^2} \text{ heißt das Trägheitsmoment bezogen auf die}$$

Drehachse u durch $r = 0$.

Es ist dann:

$$(7) \quad T = \frac{M v^2}{2} + \frac{J_u u^2}{2}.$$

Die Kräfte auf starre Körper sind (in ihrer Wirkung) darzustellen durch zwei Vektoren:

$$(8) \quad 1. \text{ die Gesamtkraft } \mathfrak{f} = \sum_a \mathfrak{f}_a \quad k = \sum k^i$$

$$(9) \quad 2. \text{ das Drehmoment } \mathfrak{l} = \sum_a [r_a \mathfrak{f}_a] \quad l^{ik} = \sum (x^i k^k - x^k k^i) \\ l^{ik} = -l^{ki}.$$

Die Bewegungsgleichungen lauten dann:

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{d\mathfrak{p}}{dt} = \mathfrak{f}, & \frac{d\mathfrak{p}^i}{dt} = k^i, \\ \frac{d\mathfrak{q}}{dt} = \mathfrak{l} - [v_0 p], & \frac{dq^{ik}}{dt} = l^{ik} - v_0^i p^k + v_0^k p^i. \end{cases}$$

Wir wählen im weiteren den Schwerpunkt zum Nullpunkt unseres Systems, so daß $\sum m v = 0$ ist. Dann vereinfachen sich die Gleichungen,

wegen $[v_0 p] = 0$ zu der Form:

$$(11) \quad \frac{dp}{dt} = f; \quad \frac{dq}{dt} = I.$$

Der kräftefreie Kreisel.

Fehlen alle äußeren Kräfte, bzw. heben diese sich vollständig auf, wie z. B. die Gravitationskräfte bei einer Unterstützung des Körpers im Schwerpunkt, so vereinfachen sich die Beziehungen wesentlich. Es gilt speziell:

$$(12) \quad \frac{dq}{dt} = 0.$$

Die Relation (3):

$$q = \sum m[r[ur]]$$

läßt sich durch einen symmetrischen Tensor \mathfrak{X} darstellen:

$$(13) \quad q = \mathfrak{X}u.$$

\mathfrak{X} ist natürlich, ebenso wie u , zeitabhängig. Der Energiesatz fordert:

$$(14) \quad (u q) = (u \mathfrak{X} u) = \text{const} = C_1,$$

andererseits fordert (12):

$$(15) \quad q^2 = (\mathfrak{X}u \mathfrak{X}u) = (u \mathfrak{X}^2 u) = C_2.$$

Wir führen nunmehr durch den orthogonalen Tensor \mathfrak{D} ein neues Bezugssystem ein durch:

$$r = \mathfrak{D}\bar{r}$$

und lassen \mathfrak{D} derartig von der Zeit abhängen, daß

$$(16) \quad \frac{d\bar{r}}{dt} = 0$$

wird. (Transformation auf ein körperfestes Bezugssystem.) In diesem lautet (13):

$$\bar{q} = \bar{\mathfrak{X}}\bar{u},$$

wo nunmehr $\bar{\mathfrak{X}}$, da es nur von den Massen und den \bar{r} abhängt, *zeitunabhängig* wird. Das Tensorellipsoid $(\bar{r} \bar{\mathfrak{X}} \bar{r}) = 1$ heißt das *Trägheitsellipsoid* des Körpers.

Die transformierten Gleichungen (14) und (15):

$$(\bar{u} \bar{\mathfrak{X}} \bar{u}) = C_1$$

und

$$(\bar{u} \bar{\mathfrak{X}}^2 \bar{u}) = C_2$$

liefern folgende anschauliche Darstellung für die zeitliche Änderung von \bar{u} :

Deuten wir \bar{u} als Ortsvektor einer Bahnkurve, so ergibt sich diese als Schnittkurve der beiden Tensorellipsoide von $\frac{\bar{\mathfrak{X}}}{C_1}$ und $\frac{\bar{\mathfrak{X}}^2}{C_2}$ (*Polhodiekurve*).

Aus

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathfrak{D} \frac{d\bar{\mathbf{r}}}{dt} + \mathfrak{D}' \bar{\mathbf{r}} = [\mathbf{u} \mathbf{r}] = \mathfrak{D} [\bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{r}}]$$

folgt wegen (16) für einen beliebigen Vektor \mathbf{a} :

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \mathfrak{D} \left(\frac{d\bar{\mathbf{a}}}{dt} + [\bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{a}}] \right) \quad (\text{vgl. S. 167}).$$

also wegen (12):

$$(17) \quad \frac{d\bar{\mathbf{q}}}{dt} + [\bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{q}}] = 0 \quad (\text{Eulersche Gleichung})$$

(bzw. $= \bar{\mathbf{I}}$ bei Vorhandensein eines äußeren Drehmomentes (11)).

Aus (14) folgt ferner, daß der Vektor \mathbf{u} als Ortsvektor gedeutet immer auf eine feste Ebene senkrecht zu \mathbf{q} hinweist. Diese Ebene ist zugleich Tangentialebene an das Ellipsoid $\frac{\mathbf{x}^2}{C_1}$, d. h. das Trägheitsellipsoid rollt bei festem Zentrum auf einer festen Ebene. Die Bahn des Berührungspunktes definiert nach Größe und Richtung die Zeitabhängigkeit des Vektors \mathbf{u} („*Herpolhodiekurve*“).

Der symmetrische Kreisel.

Im Falle einer *Rotationssymmetrie* des Körpers ist die Benutzung eines Tensors unnötig. Hier genügt an Stelle von (13) der Ansatz:

$$(1) \quad \mathbf{q} = \alpha \mathbf{u} + \beta \mathfrak{f}(\mathbf{u} \mathfrak{f}),$$

wo \mathfrak{f} ein Einheitsvektor in Richtung der Figurenachse ist und α und β zwei Konstanten sind, die die Massenverteilung bzw. die Hauptträgheitsmomente berücksichtigen. Nehmen wir an, daß alle äußeren Kräfte zusammengefaßt werden können in eine Kraft \mathfrak{f} , die in einem Punkt der Figurenachse im Abstand 1 vom Drehpunkt angreift, so gelten folgende Gleichungen:

$$(2) \quad \frac{d\mathbf{q}}{dt} = [\mathfrak{f} \mathbf{f}], \quad \frac{d\mathfrak{f}}{dt} = [\mathbf{u} \mathfrak{f}] \quad (\mathfrak{f}^2 = 1).$$

Diese Gleichungen genügen zur Berechnung der unbekannten Vektoren \mathbf{u} und \mathfrak{f} bei gegebenen Anfangsbedingungen und gegebenem \mathfrak{f} .

Ist \mathfrak{f} konstant und gehen wir aus von einem Zustand, wo \mathfrak{f} , \mathfrak{f} und \mathbf{u} und daher auch \mathbf{q} konplanar sind, und besteht die Relation

$$(3) \quad \mathfrak{f} = \tau \mathbf{q} + \alpha \tau^2 \mathfrak{f},$$

wo τ ein beliebiger Faktor ist, so folgt, daß das System dieser Vektoren in sich unverändert mit der Geschwindigkeit $\omega = \frac{h}{\alpha \tau}$ um \mathfrak{f} rotiert („*Reguläre Präzession*“).

Für die allgemeine Lösung der Gleichungen geht man üblicherweise in ein geeignetes Koordinatensystem über. Die weitere Rechnung führt dann auf elliptische Funktionen.

Beschränkt man sich auf die Untersuchung solcher Bewegungen, die der regulären Präzession nahe benachbart sind, so kann man wie folgt verfahren:

Man transformiere zunächst auf ein mit der Geschwindigkeit ω um \mathfrak{f} rotierendes Bezugssystem. In diesem sind die bei der regulären Präzession gefundenen f , u und q konstant $= f_0$, u_0 und q_0 . Eine benachbarte Bewegungsform wird dann gegeben durch:

$$f = f_0 + \delta f, \quad u = u_0 + \delta u, \quad q = q_0 + \delta q,$$

wo wir die δf , δu und δq als so kleine Größen auffassen, daß ihre Produkte vernachlässigt werden können. Zu ihrer Bestimmung findet man dann leicht die Gleichungen:

$$(4) \quad \frac{d}{dt} \delta f = \frac{h}{\alpha \omega} \left[f_0 (\delta f + \frac{\omega}{h} \gamma q) \right],$$

$$(5) \quad \frac{d}{dt} \delta q = - \left[\mathfrak{f} (\delta f + \frac{\omega}{h} \delta q) \right].$$

Diese linearen Gleichungen sind leicht zu lösen, auch in Vektorform (vgl. S. 170). Die Bewegung ergibt sich wieder als Präzessionsbewegung z. B. von \mathfrak{f} um f_0 , die sich der regulären Präzession überlagert. Sie wird als „*Nutation*“ bezeichnet.

E. Mechanik der Kontinua.

1. Kinematik.

Die Massen seien kontinuierlich verteilt. Ihre Geschwindigkeiten werden daher durch einen *Feldvektor* \mathbf{v} bestimmt.

Die *Massendichte* ist ein Skalar ρ , so daß $\int_V \rho dV = M$ die im Volumen V enthaltene Masse darstellt.

Es ist $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$ (*Kontinuitätsgleichung*).

Hier bedeutet $\frac{\partial}{\partial t}$ die Änderung des Argumentes an einer festen Stelle des Raumes mit der Zeit. Sucht man die betreffende Änderung in einem mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} bewegten Punkt, so verwenden wir das Symbol $\frac{d}{dt}$:

Es ist für einen Skalar α : $\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial \alpha}{\partial t} + (\mathbf{v} \operatorname{grad} \alpha)$,

„ „ Vektor \mathbf{a} : $\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + (\mathbf{v} \operatorname{grad}) \mathbf{a}$,

also $\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$.

Für *inkompressible* Substanzen ist $\frac{d\rho}{dt} = 0$ (nicht $\frac{\partial \rho}{\partial t}$) und $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$.

Die Verschiebungen $\delta \mathbf{f}$ der Punkte eines Kontinuums sind in der Umgebung eines Punktes \mathbf{r}_0 als lineare Funktionen des Ortes $\delta \mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ und eventuell der Zeit zu betrachten.

Wir zerlegen $\delta \mathbf{f}$ in drei Teile: $\delta \mathbf{f} = \delta \mathbf{f}_0 + \frac{1}{2} [\delta \mathbf{r} \operatorname{rot} \delta \mathbf{f}] + \mathfrak{E}(\delta \mathbf{r})$ mit den Komponenten (in kovarianter Schreibweise):

$$(1) \quad \delta s^i = \delta s_0^i + \delta x^k R_k^i + \delta x^k S_k^i,$$

wobei

$$(2) \quad R_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_i}{\partial x^k} - \frac{\partial s_k}{\partial x^i} \right)$$

und

$$(3) \quad S_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_i}{\partial x^k} + \frac{\partial s_k}{\partial x^i} \right) - s_i \left\{ \begin{matrix} ik \\ l \end{matrix} \right\}.$$

$\delta \mathbf{f}_0$ ist die Verschiebung des Punktes \mathbf{r}_0 .

$\frac{1}{2} [\delta \mathbf{r} \operatorname{rot} \delta \mathbf{f}]$ ist eine starre Rotation.

$\mathfrak{E}(\delta \mathbf{r})$ heißt die *Deformation*. \mathfrak{E} ist ein symmetrischer Tensor (*Deformationstensor*).

$\mathfrak{E}(\delta \mathbf{r})$ läßt sich weiter zerlegen in

$$(4) \quad \mathfrak{E}(\delta \mathbf{r}) = \delta \mathbf{r} \cdot \frac{\operatorname{div} \delta \mathbf{f}}{3} + \mathfrak{E}'(\delta \mathbf{r}),$$

so daß $\operatorname{div}(\mathfrak{E}'(\delta)) = 0$ ist,

oder in kovarianten Komponenten:

$$(4') \quad S_{ik} = \frac{|S|}{3} \cdot g_{ik} + S'_{ik}, \quad \text{also } |S'| = 0. \quad ^1)$$

Der erste Teil entspricht einer homogenen *Dilatation*.

Der zweite Teil entspricht einer *Scherung*, d. h. Formänderung bei konstantem Volumen.

In analoger Weise läßt sich das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{f}}{dt}$ in der Umgebung des Punktes \mathbf{r}_0 darstellen:

$$(5) \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \frac{1}{2} [\delta \mathbf{r} \operatorname{rot} \mathbf{v}] + \mathfrak{B}(\delta \mathbf{r})$$

und

$$(6) \quad \mathfrak{B}(\delta \mathbf{r}) = \delta \mathbf{r} \frac{\operatorname{div} \mathbf{v}}{3} + \mathfrak{B}'(\delta \mathbf{r}).$$

2. Kräfte.

Die in einem Kontinuum wirkenden Kräfte lassen sich einteilen in fernwirkende und nahwirkende.

Erstere werden dargestellt durch Feldvektoren \mathbf{f} (*Volumenkräfte*), letztere durch Flächenvektoren \mathbf{p} (*Oberflächenkräfte*).

Die Volumenkräfte (Gravitation u. dgl.) wirken auf alle Elemente eines Raumes.

¹⁾ $|S|$ bedeutet ΣS_{ik}^2 , identisch mit $|\mathfrak{E}|$ der symbolischen Vektorschreibweise.

Die Oberflächenkräfte (Oberflächendrucke, äußere Reibung, Atomkräfte u. dgl.) wirken nur auf die Elemente von (wirklichen bzw. gedachten) Flächen.

An freien Oberflächen sind die p als gegeben zu betrachten. Legt man eine (gedachte) Schnittfläche durch ein Kontinuum, so lassen sich die inneren nahewirkenden (Atom-)Kräfte ersetzen durch Oberflächenkräfte p in der Schnittfläche. Die Größe der p ist dabei im allgemeinen abhängig von der Orientierung der Schnittfläche. Diese Abhängigkeit wird dargestellt durch:

$$(1) \quad p = \mathfrak{P}(n), \quad p^i = P^{ik} n_k,$$

wo n der Einheitsnormalvektor zur Fläche ist.

\mathfrak{P} heißt der *Spannungstensor*. Er ist symmetrisch.

$\mathfrak{P}(n)$ läßt sich zerlegen in

$$(2) \quad \mathfrak{P}(n) = -n \cdot p + \mathfrak{P}'(n), \quad P_{ik} = \frac{|P|}{3} g_{ik} + P'_{ik},$$

wo $|P'| = 0$,

so daß $\text{div } \mathfrak{P}'(r) = 0$ ist.

$$p \text{ heißt Druck } \left(= -\frac{|P|}{3} \right).$$

Die Gesamtkraft auf ein Volumen V ist

$$(3) \quad \mathfrak{K} = \int f dv + \int p df.$$

Das Drehmoment ist

$$(4) \quad \mathfrak{L} = \int dv [fr] + \int df [pr].$$

Die Kraft, die durch die auf die Oberfläche der Volumenelemente wirkenden Oberflächenkräfte ausgeübt wird, ist durch einen Feldvektor f' zu ersetzen:

$$f' = \text{div } \mathfrak{P}.$$

Die bei einer Verschiebung δf gegen die Kräfte f und p geleistete Arbeit δA ist, falls hierbei f und p constant sind:

$$\delta A = \int dv ((f + f') \delta f)$$

mit

$$\int dv f' \delta f = \int df (p \delta f).$$

Ist f und p proportional δf , so tritt der Faktor $\frac{1}{2}$ zur rechten Seite.

3. Elastizitätstheorie.

In elastischen Körpern sind nach dem *Hookeschen Gesetz* die infolge der Verschiebung auftretenden Spannungen lineare Funktionen der Deformation, d. h. die 6 Komponenten von \mathfrak{P} sind lineare Funk-

tionen der 6 Komponenten von \mathfrak{S} . Hiernach wären 36 Konstanten zur Darstellung dieser Abhängigkeit erforderlich:

$$(1) \quad P_{ik} = a_{ik}^{lm} S_{lm}.$$

Die *Deformationsarbeit* δA wird dann:

$$(2) \quad \delta A = \frac{1}{2} \int (\mathfrak{f}' \delta \mathfrak{f}) dv = \frac{1}{2} \int (\delta \mathfrak{f} \operatorname{div} \mathfrak{P}) dv \\ = -\frac{1}{2} \int dv \cdot (\mathfrak{P} \mathfrak{S}) + \frac{1}{2} \int df (\mathfrak{p} \delta \mathfrak{f}).$$

Sehen wir von dem Oberflächenintegral ab, so ist bei Annahme konservativer Kräfte:

$$(3) \quad \omega = \frac{1}{2} (\mathfrak{P} \mathfrak{S}) = \frac{1}{2} P_{ik} S^{ik} = \frac{1}{2} a_{ik}^{lm} S^{ik} S_{lm}$$

die in der Volumeneinheit enthaltene *potentielle Energie*, d. h. die Energiedichte. ω ist eine homogene Funktion 2. Grades der Deformation bzw. der Spannungskomponenten.

Aus der Gleichung folgt:

$$P_{ik} = 2 \frac{\partial \omega}{\partial S_{ik}}.$$

Für diese Abhängigkeit sind dann nur 21 Konstanten zur Verfügung, indem jetzt:

$$a_{ik}^{lm} = a_{ki}^{ml} = a_{ik}^{lm} = a_{ik}^{ml}$$

wird.

Für *isotrope Medien* vereinfacht sich die Abhängigkeit. Hier müssen aus Symmetriegründen die Hauptachsenrichtungen der Tensoren \mathfrak{P} und \mathfrak{S} zusammenfallen. Man sieht leicht, daß der allgemeinste Ansatz für die lineare Abhängigkeit beider dann lautet:

$$(4) \quad \frac{\operatorname{div}(\delta \mathfrak{f})}{3} = \alpha \cdot \mathfrak{p}; \quad \mathfrak{S}' = \beta \mathfrak{P}; \\ S_{ik}' = \alpha P_{ik}'; \quad S_{ik}' = \beta P_{ik}'.$$

Die anschaulich physikalische Bedeutung der Konstanten α und β folgt aus Anwendungen auf spezielle Probleme. Es ist

$$(5) \quad \alpha = \frac{1-2\mu}{E} = \frac{\kappa}{3}, \quad \beta = \frac{1+\mu}{E}; \\ \frac{1}{\alpha} = a_{11} + 2a_{12}, \quad \frac{1}{\beta} = a_{11} - a_{12},$$

wo E der Elastizitätskoeffizient,

μ der Querkontraktionskoeffizient,

κ die Kompressibilität ist.

a_{11} und a_{12} sind die Koeffizienten a_{11}^{11} und a_{12}^{12} , die für isotrope Stoffe allein maßgebend sind.

In kovarianter Form ist:

$$|S| = \alpha |P|, \quad S_{ik}' = \beta P_{ik}', \quad (|S| = S^{ik} g_{ik}).$$

$$S_{ik} = \frac{1}{3} |S| g_{ik} + S'_{ik} = \frac{\alpha - \beta}{3} |P| g_{ik} + \beta P_{ik},$$

$$P_{ik} = \frac{1}{3} |P| g_{ik} + P'_{ik} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right) |S| g_{ik} + \frac{1}{\beta} S_{ik}.$$

Es folgt daher:

$$(6) \quad S_{ik} = \frac{\mu}{E} |P| g_{ik} + \frac{\mu + 1}{E} P_{ik},$$

$$(6') \quad P_{ik} = \frac{E\mu}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} |S| g_{ik} + \frac{E}{1 + \mu} S_{ik}.$$

Für die Energiedichte folgt:

$$(7) \quad \begin{aligned} 2\omega = S_{ik} P^{ik} &= \frac{1}{\beta} (S^a) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right) |S|^2 \quad ((S^a) = S_{ik} S^{ik}) \\ &= \beta (P^a) + \frac{\alpha - \beta}{3} |P|^2. \end{aligned}$$

a) Statische Elastizitätsprobleme.

1. Gegeben seien die δf , gesucht werden die f und p .

$$\text{Es ist } f = \operatorname{div} \mathfrak{P}' - \operatorname{grad} p = \frac{1}{\beta} \operatorname{div} \mathfrak{S}' - \frac{1}{3\alpha} \operatorname{grad} \operatorname{div} \delta f$$

$$p = \mathfrak{P}(n) = \frac{n}{3\alpha} \operatorname{div} \delta f + \frac{1}{\beta} \mathfrak{S}'(n).$$

2. Gegeben seien die p und f , gesucht werden die δf .

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\beta} \right) \Delta (\operatorname{div} \delta f) &= -\operatorname{div} f, \\ \frac{1}{2\beta} \Delta (\operatorname{rot} \delta f) &= -\operatorname{rot} f, \end{aligned}$$

Diese Gleichungen sind zu lösen mit den Randbedingungen, daß an der Oberfläche

$$\frac{n \operatorname{div} \delta f}{3\alpha} + \frac{1}{\beta} \mathfrak{S}'(n) = p \quad \text{wird.}$$

Bei gegebenen Deformationen findet man also die Kräfte durch Differentiation. Bei gegebenen Kräften ist aber die Deformation nur durch das viel schwierigere Problem der Lösung einer Differentialgleichung zu ermitteln. Für die einfachsten Fälle genügt es, nach der Differentiationsmethode eine größere Anzahl von speziellen Lösungen aufzustellen und unter diesen die gewünschte Lösung herauszusuchen.

¹⁾ Es ist meist üblich von dieser Gleichung auszugehen, weil (S^a) und $|S|^2$ die beiden einzigen unabhängigen quadratischen Invarianten der Verschiebung sind. Setzt man $2\omega = A(S^a) + B|S|^2$, so ist $A = \frac{1}{\beta} = \frac{E}{1 + \mu} = a_{11} - a_{12}$ und

$$B = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right) = \frac{E\mu}{(1 - 2\mu)(1 + \mu)} = a_{12}.$$

Besonders wichtig sind dabei die Fälle, wo die Volumenkräfte \mathbf{f} verschwinden, da in der Regel nur Oberflächenkräfte in Frage kommen. In diesem Falle kann man sich der *Airyschen Spannungsfunktionen* bedienen, indem man ansetzt:

$$\begin{aligned} P_{yy} &= -\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}, & P_{zz} &= -\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x}, & P_{xy} &= -\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}, \\ P_{xx} &= \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, & P_{yy} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, & P_{zz} &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \end{aligned}$$

wo U, V, W Funktionen von x, y, z sind, welche das Problem charakterisieren. Aus diesen P_{ik} findet man nach Formel (6) die S_{ik} . Andererseits aus $\mathbf{p} = \mathfrak{P}(\mathbf{n})$ die Oberflächenkräfte und $\operatorname{div} \mathfrak{P} = \mathbf{f} = 0$.

Ein anderes System von Spannungsfunktionen liefert der Ansatz:

$$\begin{aligned} P_{xx} &= \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}, & P_{yy} &= \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x}, & P_{zz} &= \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}, \\ P_{yx} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right), \\ P_{xz} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right), \\ P_{xy} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial W}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

b) Bewegungsgleichungen in isotropen elastischen Körpern.

$$\begin{aligned} \varrho \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \mathbf{f} + \operatorname{div} \mathfrak{P} \\ \varrho \frac{d^2}{dt^2} (\delta \mathbf{f}) &= \mathbf{f} + \frac{1}{2\beta} \Delta (\delta \mathbf{f}) + \frac{1}{6} \left(\frac{2}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \delta \mathbf{f} \\ &= \mathbf{f} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\beta} \right) \operatorname{grad} \operatorname{div} (\delta \mathbf{f}) - \frac{1}{2\beta} \operatorname{rot} \operatorname{rot} (\delta \mathbf{f}). \end{aligned}$$

Zerlegt man $\delta \mathbf{f}$ in $\delta \mathbf{f}_1$ und $\delta \mathbf{f}_2$, so daß

$\operatorname{div} \delta \mathbf{f}_1 = 0$; $\operatorname{rot} \delta \mathbf{f}_2 = 0$, also $\delta \mathbf{f}_2 = -\operatorname{grad} \varphi$ und sei $\mathbf{f} = 0$, so wird:

$$\varrho \frac{d^2}{dt^2} (\delta \mathbf{f}_1) = \frac{1}{2\beta} \Delta (\delta \mathbf{f}_1) \quad (\text{Transversal- oder Scherungswelle})$$

und

$$\varrho \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\beta} \right) \Delta \varphi \quad (\text{Longitudinal- oder Verdichtungswelle}).$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten sind

$$\text{für die transversale Welle} = \sqrt{\frac{1}{2\beta\varrho}} = \sqrt{\frac{E}{2\varrho(1+\mu)}}$$

$$\text{für die longitudinale Welle} = \sqrt{\frac{1}{3\varrho} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\beta} \right)} = \sqrt{\frac{E}{\varrho(1-2\mu)(1+\mu)}}.$$

4. Übergang zur Hydrodynamik.

In nicht vollkommen elastischen Körpern verschwinden bei konstanter Deformation die Spannungen \mathfrak{P}' mit der Zeit. Dies führt auf folgenden möglichst einfachen Ansatz:

$$(1) \quad \frac{\partial \mathfrak{P}'}{\partial t} = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial t} - \frac{1}{\tau} \mathfrak{P}'.$$

Ist

$$\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial t} = 0,$$

so wird dann

$$(2) \quad \mathfrak{P}' = \mathfrak{P}_0' e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (\tau = \text{Relaxationszeit}).$$

Schreiben wir $\frac{\partial}{\partial t} \delta \mathfrak{f} = \mathfrak{v}$ und stellen \mathfrak{v} (ebenso wie $\delta \mathfrak{f}$) dar durch

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0 + \frac{1}{2} [\delta \tau \cdot \text{rot } \mathfrak{v}] + \mathfrak{B}(\delta \tau)$$

und

$$\mathfrak{B}(\delta \tau) = \delta \tau \frac{\text{div } \mathfrak{v}}{3} + \mathfrak{B}'(\delta \tau),$$

so wird

$$\mathfrak{B}' = \frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{S}'; \quad \frac{\partial \mathfrak{P}'}{\partial t} = \frac{1}{\beta} \mathfrak{B}' - \frac{1}{\tau} \mathfrak{P}'.$$

Für langsam veränderliches \mathfrak{B}' bzw. kleines τ , d. h. Flüssigkeiten, erhalten wir damit:

$$(3) \quad \mathfrak{P}' = \frac{\tau}{\beta} \mathfrak{B}'.$$

\mathfrak{P}' wird also jetzt durch die Geschwindigkeitsverteilung bestimmt. Die Beziehung $|\mathfrak{S}| = \alpha |\mathfrak{P}|$ bleibt erfahrungsgemäß bestehen.

Die Bewegungsgleichungen werden dann¹⁾:

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\mathfrak{v}}{dt} &= \mathfrak{f} + \text{div } \mathfrak{P} = \mathfrak{f} + \text{div} \left(\mathfrak{S} \frac{|\mathfrak{P}|}{3} + \frac{\tau}{\beta} \mathfrak{B}' \right) \\ &= \mathfrak{f} - \text{grad } p + \frac{\tau}{2\beta} \left(\Delta \mathfrak{v} + \frac{1}{3} \text{grad div } \mathfrak{v} \right). \end{aligned}$$

$\lambda = \frac{\tau}{2\beta}$ heißt Reibungskoeffizient.

Wir erhalten somit

$$(4) \quad \rho \frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \mathfrak{f} - \text{grad } p + \lambda \Delta \mathfrak{v} + \frac{\lambda}{3} \text{grad div } \mathfrak{v}$$

als Bewegungsgleichung einer Flüssigkeit mit innerer Reibung.

5. Hydrodynamik.

Für *reibungsfree* Flüssigkeiten wird $\lambda = 0$. Die Bewegungsgleichungen lauten daher:

¹⁾ \mathfrak{S} bedeutet Einheitstensor (vgl. S. 164).

$$(1) \quad \varrho \cdot \frac{dv}{dt} = f - \text{grad } p$$

oder

$$(1') \quad \frac{dv}{dt} = \frac{f}{\varrho} - \text{grad } P;$$

wo

$$P = \int \frac{dp}{\varrho}$$

gesetzt werden kann, wenn ϱ eine eindeutige Funktion von p ist, bzw. wegen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{dv}{dt} - (v \text{ grad}) v = \frac{dv}{dt} - \frac{1}{2} \text{grad } v^2 + [v \text{ rot } v] \\ (2) \quad \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{f}{\varrho} - \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} + P \right) + [v \text{ rot } v] \end{aligned}$$

Eulersche Bewegungsgleichungen.

Ist $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$ (*stationäre Strömung*) und $\text{rot } v = 0$ (*wirbelfreie oder Potentialströmung*), so wird

$$(3) \quad \frac{f}{\varrho} - \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} + P \right) = 0,$$

bzw. bei konstantem ϱ

$$(3') \quad f - \text{grad} \left(\varrho \frac{v^2}{2} + p \right) = 0.$$

$\left(\varrho \frac{v^2}{2} + p \right)$ heißt *hydrodynamischer Druck*.

Hat f ein Potential, d. h. $f = \text{grad } \varphi$, so wird

$$(4) \quad \frac{\partial \text{rot } v}{\partial t} = \text{rot} [v \text{ rot } v]$$

und daher

$$(4') \quad \frac{d}{dt} \int d\mathbf{f} \text{ rot } v = \frac{d}{dt} \oint v \, d\mathbf{s} = 0$$

(vgl. 143), d. h. das Wirbelmoment einer mit der Flüssigkeit mitbewegten Fläche bleibt konstant (*Helmholtz*).

Ist $\text{rot } v = 0$, so ist v darstellbar als $v = \text{grad } \Phi$ (Geschwindigkeitspotential). Es gilt dann

$$(5) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \varphi + P + \frac{1}{2} \text{grad}^2 \Phi = \text{const.}$$

Für inkompressible Flüssigkeit $\varrho = \text{const.}$, $T = p$ ergibt die Kontinuitätsgleichung $\text{div } v = 0$; also $\Delta \Phi = 0$.

Die meisten Probleme der Hydrodynamik laufen auf die Lösung dieser Differentialgleichung mit Berücksichtigung der durch die Begrenzung der Strömung gegebenen Randbedingungen: $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$, bzw.

$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = V_n$ heraus, wo V_n die Normalkomponente der Geschwindigkeiten der Begrenzung ist.

Bei strengerer Annäherung an die Wirklichkeit ist die Flüssigkeit als an die Begrenzung haftend zu betrachten. Dann ist aber im allgemeinen die Bedingung $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ nicht zu erfüllen.

Literatur.

Lehrbücher der analytischen Mechanik, bzw. der theoretischen Physik, s. a. Enzyklopädie der math. Wiss. (Leipzig: B. G. Teubner), Bd. IV: Mechanik, ferner *Routh*: Dynamik der Systeme starrer Körper (Leipzig: B. G. Teubner), *Louis-Temps*: Lehrbuch der Elastizität (Leipzig: B. G. Teubner), *Lamb*: Lehrbuch der Hydrodynamik (Leipzig: B. G. Teubner).

Zwölfter Abschnitt. Elektrizitätslehre.

1. Elektrostatik.

Von einer ruhenden Ladung e_1 am Ort r_1 wird auf eine zweite e_2 am Ort r_2 eine Kraft R_{12} ausgeübt, wobei $r = r_1 - r_2$ sei,

$$(1) \quad R_{12} = \frac{e_1 e_2 (r_1 - r_2)}{\epsilon |r_1 - r_2|^3} = \frac{e_1 e_2 r}{\epsilon r^3},$$

wenn der ganze Raum mit einem homogenen isotropen Medium (Dielektrikum) erfüllt ist. ϵ heißt *Dielektrizitätskonstante* des Mediums. Sie wird für das Vakuum $= 1$ gesetzt. — Wir kennen keinen Stoff mit $\epsilon < 1$.¹⁾

Die Ladungen werden durch die Kräfte gemessen. (Das ist immer möglich, sobald drei Ladungen und die Kräfte zwischen je zweien von ihnen gegeben sind. Dann bestimmen sich die Ladungen aus den drei für die Kräfte geltenden Gleichungen.)

Ladungsdichte ρ heißt bei kontinuierlich verteilter Ladung der Ausdruck: $\lim_{V \rightarrow 0} \frac{e}{V}$, wo e die im Volumen V enthaltene Ladung bedeutet. Sie ist auch definiert durch $\int \rho dv = e$.

$$(2) \quad \mathcal{E} = \frac{R_{12}}{e_2} = \frac{e_1 r}{\epsilon r^3}$$

heißt *Feldstärke* im Punkte der Ladung 2. Sie ist unabhängig von der Größe (und überhaupt der Existenz) von e_2 , also eine Funktion des Ortes. \mathcal{E} bildet ein *Feld*. Daher läßt sich das elektrische Potential φ definieren durch

$$(3) \quad \mathcal{E} = - \text{grad } \varphi.$$

Es ist, falls ϵ konstant ist,

$$(4) \quad \varphi = \int \frac{\rho}{\epsilon r} dv$$

und

$$(5) \quad \rho = - \frac{\epsilon}{4\pi} \Delta \varphi.$$

¹⁾ Im Innern von anisotropen Stoffen ist der Skalar ϵ durch einen Tensor zu ersetzen (vgl. S. 222).

Aus (2) folgt dann $\text{rot } \mathfrak{E} = 0$.

$$(6) \quad \mathfrak{D} = \epsilon \mathfrak{E}$$

heißt *dielektrische Verschiebung*. Es ist

$$(7) \quad 4\pi \varrho = \text{div } \mathfrak{D} = \epsilon \text{div } \mathfrak{E}.$$

\mathfrak{D} ist in isotropen Stoffen stets parallel zu \mathfrak{E} .

Polarisation heißt der Ausdruck

$$(8) \quad \mathfrak{P} = \frac{1}{4\pi} (\mathfrak{D} - \mathfrak{E}) = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \mathfrak{E}.$$

Die Vektorfelder der \mathfrak{E} und \mathfrak{D} lassen sich veranschaulichen durch den Geschwindigkeitsvektor \mathbf{v} der Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit. Den Strömungslinien entsprechen die *Kraftlinien* (für \mathfrak{E}), sowie die *Induktionslinien* (für \mathfrak{D}).

Als *Zahl* der durch einen Querschnitt q gehenden Kraftlinien bezeichnet man das Integral $\int dq \cdot E_n$ über den Querschnitt, auch *Kraftfluß* genannt. Analog spricht man von *Induktionsfluß*.

Induktionslinien endigen *nur* in den Ladungen, Kraftlinien endigen außerdem im Raum, sobald die Dielektrizitätskonstante sich ändert. Man spricht dann von *freien Ladungen*:

$$(9) \quad \varrho' = \frac{1}{4\pi} \text{div } \mathfrak{E}; \quad \text{div } \mathfrak{E} = \frac{4\pi}{\epsilon} \varrho + \frac{1}{\epsilon} \left(\mathfrak{E} \text{grad } \frac{1}{\epsilon} \right) = 4\pi \varrho', \quad \varphi = \int \frac{\varrho' dv}{r}.$$

An der Trennungsfläche zweier Stoffe verschiedener Dielektrizitätskonstanten bleibt die Normalkomponente von \mathfrak{D} stetig, ebenso die Parallelkomponente von \mathfrak{E} .

Bildet im Stoff 1 die Richtung von \mathfrak{D} (bzw. \mathfrak{E}) mit der Normalen den Winkel α_1 und entsprechend im Stoff 2 den Winkel α_2 , so ist $\text{tg } \alpha_1 : \text{tg } \alpha_2 = \epsilon_1 : \epsilon_2$ (Brechungsgesetz der Kraftlinien).

Die Flächendichte ω ist bei kontinuierlich auf einer Fläche verteilter Ladung definiert durch $\omega = \lim_{F \rightarrow 0} \frac{e}{F}$ oder durch

$$\int_F \omega df = e$$

wo e gleich der auf der Fläche F befindlichen Ladung ist. Das ergibt die Beziehung

$$(10) \quad 4\pi\omega = -(D_{n1} + D_{n2}),$$

wo \mathfrak{D}_1 und \mathfrak{D}_2 die Verschiebungen auf den beiden Seiten der Fläche sind. Entsprechend heißt ω' definiert durch

$$(11) \quad 4\pi\omega' = -(E_{n1} + E_{n2}),$$

die Flächendichte der freien Ladung.

Die *Energie* eines Ladungssystems ist gleich

$$(12) \quad U = \frac{1}{2} \int dv \varphi \cdot \varrho + \frac{1}{2} \int df \varphi \omega = \frac{1}{8\pi} \int dv (\mathfrak{E} \mathfrak{D}) = \frac{1}{8\pi} \int dv s \mathfrak{E}^2.$$

Leiter der Elektrizität heißen Körper, in denen im Gleichgewichtszustand φ konstant ist. Im Inneren von Leitern ist \mathfrak{E} und $\varrho = 0$. Sie können nur eine Oberflächenladung besitzen. Ein Leiter verhält sich bei statischen Problemen wie ein Stoff unendlich großer Dielektrizitätskonstante.

Die elektrische Energie ist im Gleichgewichtszustand ein *Minimum* gegenüber der aller andern Ladungsverteilungen, die bei den gegebenen Ladungen auf den Leitern möglich sind.

2. Elektrokinetik.

Jeder Ladungstransport heißt *elektrischer Strom*.

Stromstärke I heißt die durch eine gegebene Fläche F in der Zeiteinheit transportierte Elektrizitätsmenge. *Stromdichte* i ist definiert durch

$$(1) \quad \int_F i_n df = I = \frac{ds}{dt} = \int dv \operatorname{div} i.$$

Man unterscheidet die Dichte des

1. *Leitungsstroms* $i = \sigma \mathfrak{E}$ (σ heißt Leitfähigkeit).
2. *Konvektionsstroms* $i = \varrho v$.
3. *Verschiebungsstroms* $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}$. Dies ist als Strom zu deuten, wegen

$$\frac{1}{4\pi} \int df \frac{\partial}{\partial t} D_n = \frac{1}{4\pi} \int dv \operatorname{div} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int dv \cdot \varrho = \frac{ds}{dt}.$$

Als *wahren Strom* c bezeichnet man

$$(2) \quad c = \sigma \mathfrak{E} + \frac{s}{4\pi} \frac{d\mathfrak{E}}{dt} + \varrho v.$$

Es gilt immer $\operatorname{div} c = 0$.

Stationäre Ströme in Drähten. Ist ein Leitungsstrom, für den $\frac{\partial i}{\partial t} = 0$ ist, auf einen Leiter von geringem Querschnitt q beschränkt, so ist $I = \int_q i_n df$ eine Konstante längs des Drahtes.

Die Potentialdifferenz $\varphi_1 - \varphi_2$ zwischen zwei Punkten des Drahtes ist dann proportional I .

$$(3) \quad \int_1^2 (\mathfrak{E} ds) = \varphi_1 - \varphi_2 = WI.$$

W heißt *Widerstand*.

$$(4) \quad W = \int_1^2 \frac{ds}{q\sigma}.$$

W ist bei gegebenen Dimensionen und Leitfähigkeit unabhängig von I (*Ohmsches Gesetz*).

Elektrischer Kreis. In einem geschlossenen Kreis ist $\oint \mathfrak{E} d\mathfrak{s} = 0$. Ist aber in einem Bereiche die Beziehung $\frac{i}{\sigma} - \mathfrak{E} = 0$ durchbrochen (Element, elektrolytische Zelle usw.), so heißt $\int \left(\frac{i}{\sigma} - \mathfrak{E} \right) d\mathfrak{s}$ *elektromotorische Kraft* E und es gilt:

$$(5) \quad I = \frac{E}{W}.$$

3. Magnetostatik.

Die Magnetostatik entspricht der Elektrostatik in folgenden Punkten:

Der Ladung e entspricht die magnetische Menge m .

Der Dielektrizitätskonstante ϵ entspricht die Permeabilität μ .

Der elektrischen Feldstärke \mathfrak{E} entspricht die magnetische Feldstärke \mathfrak{H} .

Der Verschiebung \mathfrak{D} entspricht die Induktion \mathfrak{B} (wobei $\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$).

Der Polarisation \mathfrak{P} entspricht die Magnetisierung \mathfrak{M} .

Alle Formeln der Elektrostatik gehen dann in die entsprechenden der Magnetostatik über.

Abweichungen. Leiter des Magnetismus gibt es nicht, wohl aber verhalten sich Stoffe mit großem μ annähernd wie Leiter.

μ ist im Gegensatz zu ϵ für viele (ferromagnetische) Stoffe keine Konstante, sondern sowohl von der Feldstärke wie von der Vorgeschichte abhängig (Hysteresis). Jeder Magnetpol m ist mit einem andern — m verbunden.

4. Elektromagnetismus.

Strömende Elektrizitätsmengen üben auf andere strömende außer den elektrostatischen auch „elektromagnetische“ Kräfte aus.

Von einem stromdurchflossenen System wird auf ein Stromelement der Länge und Richtung $d\mathbf{l}$, in dem ein Strom der Stärke I fließt, eine Kraft

$$(1) \quad \mathfrak{K} = \frac{\mu I}{c^2} \left[d\mathbf{l} \int \frac{d\mathbf{v} [\mathbf{r}]}{r^3} \right]$$

ausgeübt, wobei das Integral über das mit der Stromdichte i durchflossene System zu erstrecken und \mathbf{r} der vektorielle Abstand vom Stromelement $d\mathbf{l}$ zum Volumelement $d\mathbf{v}$ ist (*Biot-Savartsches Gesetz*).

(2) $\frac{1}{c} \int \frac{d\mathbf{v} [\mathbf{r}]}{r^2} = \mathfrak{H}$ heißt magnetische Feldstärke. Das so definierte \mathfrak{H} ist mit dem magnetostatisch definierten identisch. Der Faktor c hat die Dimension einer Geschwindigkeit und ist experimentell zu $3 \cdot 10^{10}$ cm/sec, also gleich der *Lichtgeschwindigkeit* gefunden. Es ist also

$$(3) \quad \mathfrak{K} = \frac{\mu I [d\mathbf{l} \mathfrak{H}]}{c}.$$

Es folgt, daß $\operatorname{div} \mu \mathfrak{H} = \operatorname{div} \mathfrak{B} = 0$ ist. Nach dieser Auffassung endigen die Induktionslinien (\mathfrak{B}) nirgends (auch nicht an den Polen eines Magneten, sondern setzen sich im Innern desselben fort). Es läßt sich daher ein magnetisches Vektorpotential definieren durch

$$\mathfrak{B} = \operatorname{rot} \mathfrak{A},$$

und es wird

$$(4) \quad \mathfrak{A} = \frac{\mu}{c} \int \frac{dv \mathfrak{i}}{r}$$

und

$$(5) \quad \operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{4\pi \mathfrak{i}}{c}.$$

Magnetischer Kreis. In Stoffen sehr hoher Permeabilität (Eisen) verlaufen die Induktionslinien (\mathfrak{B}) angenähert wie die Stromlinien in Leitern.

Hat man es mit einem geschlossenen Eisenkreis zu tun, so gelten die zum elektrischen Kreis analogen Formeln. Der Formel $\mathfrak{i} = \sigma \mathfrak{E}$ entspricht dann $\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$. $M = \oint \mathfrak{H} d\mathfrak{s}$ wird hier aber nicht gleich Null, sondern $= \frac{4\pi}{c} \int i_n df$, wo das Integral über die durch den Kreis

begrenzte Fläche zu nehmen ist. Fließt der Strom in n Drahtwindungen mit der Stärke I durch diese Fläche, so wird

$$(6) \quad M = \oint \mathfrak{H} d\mathfrak{s} = \frac{4\pi n I}{c}.$$

Diese Größe kann als *magnetisierende Kraft* bezeichnet werden. Es wird dann $I_m = \oint B_n df$ der gesamte Induktionsfluß, oder

$$I_m = \frac{M}{W_m},$$

wo

$$(7) \quad W_m = \oint \frac{ds}{q\mu}$$

ist, in Analogie zu $I = \frac{E}{W}$.

5. Elektrodynamik.

Nach *Maxwell* ist der Verschiebungsstrom $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}$ in seiner magnetischen Wirkung äquivalent einem Leitungsstrom \mathfrak{i} . Daher folgt durch Verallgemeinerung:

$$(1) \quad \operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{4\pi \mathfrak{i}}{c} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} \quad 1. \text{ Hauptgleichung.}$$

Durch Analogie und auf Grund von Experimenten (Induktion) folgt ferner:

$$(2) \quad \operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} \quad 2. \text{ Hauptgleichung.}$$

welche auf Grund des *Stokesschen* Satzes auch lautet

$$(3) \quad \oint (\mathfrak{E} d\mathfrak{s}) = -\frac{1}{c} \int df \frac{\partial B_n}{\partial t} \quad (\text{Induktionsgesetz}).$$

Die Energie eines Feldes besteht aus einem elektrischen Teil U und einem magnetischen Teil T

$$(4) \quad W = U + T = \frac{1}{8\pi} \int dv (\varepsilon E^2 + \mu H^2).$$

Hieraus folgt

$$(5) \quad \frac{dW}{dt} = - \int dv (\mathfrak{E} \mathfrak{i}) - \frac{c}{4\pi} \int df [\mathfrak{E} \mathfrak{H}]_n.$$

$$\frac{c}{4\pi} [\mathfrak{E} \mathfrak{H}] = \mathfrak{S} \text{ heißt Poyntingscher Vektor.}$$

Da $\int df \mathfrak{S}$ hiernach der Energieverlust pro Zeiteinheit durch die Oberfläche F darstellt, wird \mathfrak{S} als der *Vektor der Energieströmung* gedeutet.

Durch Elimination von \mathfrak{H} bzw. \mathfrak{E} aus den Hauptgleichungen folgt:

$$(6) \quad \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi \sigma \mu}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \Delta \mathfrak{E} - \text{grad div } \mathfrak{E}$$

bzw.

$$(6') \quad \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial t^2} - \frac{4\pi \sigma \mu}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \Delta \mathfrak{H},$$

d. h. eine Wellengleichung für \mathfrak{E} bzw. \mathfrak{H} .

In Analogie zur Elastizitätslehre kann man die Kräfte in einem statischen elektromagnetischen Feld auf die *Maxwellschen Spannungen* zurückführen, in der Form

$\mathfrak{p} = \text{div } \mathfrak{X}$, wobei \mathfrak{p} die Kraft auf die Volumeneinheit bedeutet, also $\int \mathfrak{p} dv = \mathfrak{P}$ und wo \mathfrak{X} durch die elektrischen und magnetischen Kräfte bestimmt ist durch:

$$(7) \quad \mathfrak{X}(\alpha) = \mathfrak{E}(\mathfrak{E}\alpha) - \frac{\alpha E^2}{2} + \mathfrak{H}(\mathfrak{H}\alpha) - \frac{\alpha H^2}{2} \quad ^1)$$

$$T_{ik} = \frac{1}{2} g_{ik} (E)^2 - E_i E_k + \frac{1}{2} g_{ik} (H)^2 - H_i H_k.$$

In einem nicht statischen Felde erweitert sich diese Beziehung zu:

$$(8) \quad \mathfrak{p} = \text{div } \mathfrak{X} + \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial t}.$$

$g = \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \mathfrak{S}$ heißt *elektromagnetische Bewegungsgröße*.

¹⁾ Diese Gleichung kann so gedeutet werden, daß man $\mathfrak{X}(n)$ als eine Spanningskraft in Richtung n auffaßt. Ist dann $n \parallel \mathfrak{E}$, so wird der erste Teil $= \frac{E^2}{2}$, das bedeutet einen Zug. Ist $n \perp \mathfrak{E}$, so wird der erste Teil $= -\frac{E^2}{2}$, das bedeutet einen Druck. Man findet so die *Faradaysche* Auffassung, daß in Richtung der Kraftlinien ein Zug und senkrecht dazu ein Druck wirkt.

Es tritt hier zu der statischen Kraft \mathfrak{E} noch eine dynamische $\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}$, die man als *Trägheit der elektromagnetischen Energie* deuten kann, deren Masse dann gleich $\frac{W}{c^2}$ zu setzen ist.

6. Elektrodynamik quasistationärer Ströme.

Wenn man in der 1. Hauptgleichung $\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}$ neben $4\pi i$ vernachlässigen kann, d. h. bei relativ langsam veränderlichen Feldern und Strömen, treten Vereinfachungen ein.

Fließt der Strom in einen geschlossenen Draht 1, so tritt zu der bisherigen elektromotorischen Kraft E noch eine induzierte elektromotorische Kraft E^t hinzu:

$$(1) \quad E^t = \int \mathfrak{E}^t d\mathfrak{s}_1 = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int df B_n = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int \mathfrak{A} d\mathfrak{s} \quad (\mathfrak{B} = \text{rot } \mathfrak{A}).$$

Rührt \mathfrak{B} von einem Stromkreis 2 mit dem Strom I_2 her, so wird

$$\mathfrak{B} = \mu \frac{I_2}{c} \int \frac{[d\mathfrak{s}_2 r]}{r^3}, \quad \mathfrak{A} = \mu \frac{I_2}{c} \int \frac{d\mathfrak{s}_2}{r},$$

also

$$(2) \quad E_1^t = \mu \iint \frac{d\mathfrak{s}_1 d\mathfrak{s}_2}{r_{12}} \cdot \frac{dI_2}{dt}.$$

$L_{12} = \mu \iint \frac{d\mathfrak{s}_1 d\mathfrak{s}_2}{r_{12}}$ heißt *gegenseitiger Induktionskoeffizient*.

Betrachtet man die Induktion verschiedener Stromteile $d\mathfrak{s}_1$ und $d\mathfrak{s}_1'$ ein und desselben Stromkreises aufeinander, so werden obige zwei Stromkreise identisch, die Größe $L_1 = 2\mu \iint \frac{d\mathfrak{s}_1 d\mathfrak{s}_1'}{r_{11}}$ heißt *Selbstinduktionskoeffizient*.

Für einen Stromkreis gilt daher

$$(3) \quad E_1^t = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - \sum_n L_{1n} \frac{dI_n}{dt}.$$

7. Elektronentheorie.

Die Elektronentheorie nimmt an, daß es weder über größere Räume kontinuierlich verteilte Ladungen und Ströme gibt, noch Räume in denen ϵ und μ von 1 abweicht.

Alle Ladungen sollen in sehr kleinen Voluminas konzentriert, alle Ströme reine Konvektionsströme sein. Die größeren Werte von ϵ und μ , sowie σ sollen durch den atomistischen Mechanismus beweglicher elektrischer Ladungen makroskopisch vorgetäuscht werden.

Nach dieser Theorie ist also $\epsilon = 1$, $\mu = 1$, $\sigma = 0$ zu setzen, so daß

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{E}, \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{H}, \quad i = \varrho v = \mathfrak{I} \quad \text{ist.}$$

Kinetische Potentiale. Wir definieren Φ durch

$$(1) \quad \mathcal{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t} = -\text{grad } \Phi, \quad \mathfrak{H} = \text{rot } \mathfrak{U}$$

$$(1') \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\text{div } \mathfrak{U},$$

dann folgt

$$(2) \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \Delta \Phi = 4\pi \varrho, \quad \Phi \text{ und } \mathfrak{U} \text{ heißen kinetische Potentiale}$$

$$(2') \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{U}}{\partial t^2} - \Delta \mathfrak{U} = 4\pi \mathfrak{I}.$$

Wir definieren den *Hertzschen Vektor* \mathfrak{B} aus $\mathfrak{U} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}$, ferner q durch $\mathfrak{I} = \frac{1}{c} \frac{\partial q}{\partial t}$, dann wird $\Phi = \varphi - \text{div } \mathfrak{B}$

$$(3) \quad \mathcal{E} = -\text{grad } \varphi + \text{grad div } \mathfrak{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial t^2}; \quad \mathfrak{H} = \frac{1}{c} \text{rot } \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t},$$

und für \mathfrak{B} gilt

$$(4) \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial t^2} - \Delta \mathfrak{B} = 4\pi q.$$

Die Lösung dieser Gleichungen lautet

$$(5) \quad \begin{aligned} \Phi_t &= \int \frac{dv}{r} \{ \varrho \}_{t-\frac{r}{c}} \\ \mathfrak{U}_t &= \int \frac{dv}{r} \{ \mathfrak{I} \}_{t-\frac{r}{c}} \\ \mathfrak{B}_t &= \int \frac{dv}{r} \{ q \}_{t-\frac{r}{c}} \end{aligned}$$

Der Index $t - \frac{r}{c}$ bedeutet, daß die ϱ , \mathfrak{I} , q , die ja Funktionen des Ortes und der Zeit sind, in der Formel nicht mit den der Zeit t , sondern den mit der Zeit $t - \frac{r}{c}$ entsprechenden Werten einzusetzen sind, um Φ , \mathfrak{U} , \mathfrak{B} für die Zeit t zu finden.

Die Wirkung einer Ladung usw. macht sich also im Aufpunkt nicht sofort, sondern erst nach der Zeit $\frac{r}{c}$ bemerkbar (daher der Ausdruck: *Retardierte Potentiale*).

Diese Form der Lösung bringt es mit sich, daß nur für sehr kleines r , bzw. bei langsam wechselndem ϱ , \mathfrak{I} , q die statischen Beziehungen gelten.

Methodisch vorteilhaft ist die daraus folgende Vorschrift: Man denke sich zur Zeit t eine Kugelwelle mit der Geschwindigkeit $-c$ vom Aufpunkt ausgehen. Alle Ladungen wirken dann mit dem Betrag, den sie während des Hinüberstreichens dieser Welle haben.

Mit Hilfe dieser Formeln lassen sich die Felder bewegter Ladungen berechnen.

Für eine *gleichförmig geradlinig mit v sich bewegende Ladung e* findet man:

$$\Phi = \frac{e}{\sqrt{r^2(1-\beta^2) + \left(\frac{rv}{c^2}\right)^2}} \quad \text{wo } \beta = \frac{v}{c} \text{ ist.}$$

$$\mathfrak{A} = \frac{ev}{c \sqrt{r^2(1-\beta^2) + \left(\frac{rv}{c^2}\right)^2}}$$

und daraus

$$\mathfrak{E} = \frac{(1-\beta^2)^{3/2} e r}{\sqrt{r^2(1-\beta^2) + \left(\frac{rv}{c^2}\right)^2}}$$

$$\mathfrak{H} = \frac{(1-\beta^2)^{3/2} e [v r]}{c \sqrt{r^2(1-\beta^2) + \left(\frac{rv}{c^2}\right)^2}}.$$

$\Phi = \text{const}$ stellt ein abgeplattetes Rotationsellipsoid dar mit dem Achsenverhältnis $\sqrt{1-\beta^2}$ (*Heaviside-Ellipsoid*).

Die Kraft auf eine zweite gleichfalls mit der Geschwindigkeit v bewegte Ladung e_2 wird dann gleich

$$\mathfrak{K} = e_2 \left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c} [v \mathfrak{H}] \right) = -(1-\beta^2) \text{grad } \Phi$$

$$\Psi = (1-\beta^2) \Phi \text{ heißt Konvektionspotential.}$$

Dipolstrahlung. Das Moment p eines Dipols sei als Funktion der Zeit gegeben. Die Geschwindigkeit seiner Bestandteile sei klein gegen c . Dann ist für einen Punkt r , wo r groß gegen die Dimension des Dipols sei,

$$\beta = \frac{p}{r}$$

$$\mathfrak{E} = \frac{3r(p\dot{r}) - r^2\ddot{p}}{r^3} + \frac{3r(\dot{p}r) - r^2\ddot{p}}{cr^2} + \frac{1}{c^2 r^2} [r\ddot{p}]$$

$$\mathfrak{H} = -\frac{[r\dot{p}]}{cr^2} - \frac{1}{c^2 r^2} [r\ddot{p}],$$

wobei p das Moment zur Zeit $\left(t - \frac{r}{c}\right)$ bedeuten soll und

$$\dot{p} = \frac{dp}{dt}; \quad \ddot{p} = \frac{d^2 p}{dt^2}.$$

Für großes r wird hiernach $\mathfrak{E} = \frac{r}{4\pi c^2 r^2} [r\ddot{p}]$.

Die Ausstrahlung pro Zeiteinheit wird dann

$$-\frac{dW}{dt} = \int S_n d\Omega = \frac{2}{3c^3} (\ddot{p})^2.$$

Ist $p = p_0 \sin \omega t = p_0 \sin \frac{2\pi}{\lambda} ct$ (λ = Wellenlänge), so wird

$$\frac{dW}{dt} = \frac{32\pi^4}{3} \frac{c}{\lambda^4} (p_0^2).$$

8. Elektromagnetische Wellen (Grundlagen der Optik).

Jede Lösung der *Maxwellschen* Gleichungen bzw. der Wellengleichung S. 194 bedeutet einen elektromagnetischen Ausbreitungsvorgang. Als *Welle* im engeren Sinne pflegt man eine Lösung der Form: $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 e^{i\omega t}$, wo \mathfrak{E}_0 nur vom Ort abhängt, zu bezeichnen.

$n = \frac{\omega}{2\pi}$ heißt ihre *Schwingungszahl*. Von der komplexen Lösung ist dann der Realteil zu nehmen. Der Imaginärteil stellt eine zweite Welle dar. Besonders einfache Wellentypen sind die partikulären Lösungen (vgl. S. 95).

Schreibt man

$$(1) \quad \mathfrak{E}_0 = a e^{i\omega \varphi} \text{ bzw. } \mathfrak{E} = a e^{i\omega(\varphi + t)},$$

wo a und φ Funktionen der Orte sind, so heißt a die *Amplitude* und φ die *Phase* der Welle. Die Flächen konstanten φ heißen *Wellenflächen*.

$\frac{2\pi}{\omega |\text{grad } \varphi|}$ heißt *Wellenlänge*.

Im Grenzfall von sehr großem ω , d. h. sehr kleiner Wellenlänge erhält man für φ die Differentialgleichung $(\text{grad } \varphi)^2 = 1$; d. h. die Wellenflächen sind Parallellflächen. Die Orthogonalen zu diesen sind gerade Linien. Man bezeichnet sie als *Strahlen*. Dieser Grenzfall liefert daher die *geometrische Optik*.

Ebene Wellen: Die *Maxwellschen* Gleichungen gestatten folgende partikuläre Lösung:

$$(2) \quad \mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 e^{i\omega(t - \frac{(rn)}{c} \varphi)}; \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 e^{i\omega(t - \frac{(rn)}{c} \varphi)}$$

wo \mathfrak{E}_0 , \mathfrak{H}_0 , ω , n willkürliche Konstanten sind, zwischen denen aber die folgenden Beziehungen bestehen müssen: $n^2 = 1$; $(\mathfrak{E}_0 n) = 0$; $(\mathfrak{H}_0 n) = 0$;

$$\mathfrak{H}_0 = -\frac{p}{\mu} [n \mathfrak{E}_0] \text{ mit } p = \sqrt{\varepsilon \mu - \frac{i 4\pi \sigma \mu}{\omega}}$$

n heißt Wellennormale, $(rn) = \text{konst.}$ ist die Wellenebene,

p heißt (komplexer) *Brechungsindex*.

Die Konstanten können reell oder komplex sein. Es bedeutet:

\mathfrak{E}_0 reell eine linear polarisierte Welle,

\mathfrak{E}_0 komplex eine elliptisch polarisierte Welle,

ω komplex eine zeitlich gedämpfte, abklingende Welle,

p komplex eine örtlich gedämpfte Welle (Absorption),

n komplex eine Welle mit in der Wellenebene abfallender Amplitude (nur an Oberflächen existenzfähig).

Im folgenden ist die Lösung noch einmal in spezieller Form behandelt.

\mathfrak{E} und \mathfrak{H} seien nur Funktionen von x und t (nicht y und z). Dann vereinfacht sich die Wellengleichung zu:

$$(3) \quad \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi \sigma \mu}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial x^2}.$$

Wegen $\frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$ und $\text{div } \mathcal{E} = 0$ wird $\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$, also E_x überhaupt unabhängig vom Ort.

Die Welle ist also rein *transversal*.

Setzt man $E_y = E_{0y} \cdot e^{i\omega t}$ und $E_x = E_{0x} \cdot e^{i\omega t}$ für $x=0$, so erhält man

$$\left. \begin{aligned} E_y &= E_{0y} \cdot e^{i\omega \left(t - p \frac{x}{c}\right)} \\ E_x &= E_{0x} \cdot e^{i\omega \left(t - p \frac{x}{c}\right)} \end{aligned} \right\} \text{ wo } p^2 = \varepsilon \mu - \frac{i \cdot 4\pi \sigma \mu}{\omega},$$

$$H_y = E_{0x} \frac{p}{\mu} \cdot e^{i\omega \left(t - p \frac{x}{c}\right)}$$

$$H_x = E_{0y} \frac{p}{\mu} \cdot e^{i\omega \left(t - p \frac{x}{c}\right)}.$$

Zerlegt man $p = n - i\kappa$, wo

$$n^2 - \kappa^2 = \varepsilon \mu, \quad n \cdot \kappa = \frac{2\pi \sigma \mu}{\omega}$$

bzw.

$$n^2 = \frac{\mu}{2} \left(\sqrt{\varepsilon^2 + \frac{16\pi^2 \sigma^2}{\omega^2}} + \varepsilon \right)$$

$$\kappa^2 = \frac{\mu}{2} \left(\sqrt{\varepsilon^2 + \frac{16\pi^2 \sigma^2}{\omega^2}} - \varepsilon \right),$$

so schreibt sich dies auch:

$$E_y = E_{0y} e^{-\frac{\hbar \omega x}{c}} \cdot e^{i\omega \left(t - \frac{x}{c}\right)} \quad \text{usw.}$$

$\frac{c}{n}$ ist also die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle,

n heißt *Brechungsindex* für $\sigma = 0$ gleich $\sqrt{\varepsilon \mu}$,

p heißt *komplexer Brechungsindex*,

κ heißt *Absorptionskoeffizient*.¹⁾

Für reelles n ($\sigma = 0$) ist $E_x \sim H_y$ und $E_y \sim H_x$.

Für imaginäres p ($\sigma \neq 0$) sind E_x und H_y um den Phasenwinkel $\arctg \frac{\kappa}{n}$ gegen einander verschoben. E_x bleibt hinter H_y zurück.

9. Wellen in anisotropen Medien (Kristalloptik).

Wir setzen

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{U}(\mathcal{E}) \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{E} = \mathfrak{U}^{-1}(\mathfrak{D}); \quad \mu = 1.$$

Hier sei \mathfrak{U} ein symmetrischer Tensor (\mathfrak{U}^{-1} der entsprechende reziproke), der an die Stelle des Skalars ε tritt.

¹⁾ Vielfach wird auch $\delta = \frac{\hbar \omega}{c}$ als Absorptionskoeffizient bezeichnet.

Der Ansatz für eine ebene Welle für reelles p ($\sigma = 0$, $v = \frac{c}{p}$)

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_0 e^{i\omega \left(t - \frac{r\mathfrak{n}}{v}\right)}$$

usw. in die Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{D}}{\partial t^2} = \text{rot rot } \mathfrak{E} \\ = \Delta \mathfrak{E} - \text{grad div } \mathfrak{E}$$

eingesetzt, ergibt dann

$$(1) \quad \frac{v^2}{c^2} \cdot \mathfrak{D} - \mathfrak{E} + \mathfrak{n}(\mathfrak{n}\mathfrak{E}) = 0.$$

Hieraus folgt: $(\mathfrak{D}\mathfrak{n}) = 0$. Aus der 1. Maxwellschen Gleichung folgt:

$$\frac{v}{c} \cdot \mathfrak{D} = [\mathfrak{n}\mathfrak{H}] \quad \text{und} \quad \frac{v}{c} \cdot \mathfrak{H} = -[\mathfrak{n}\mathfrak{E}],$$

also

$$(\mathfrak{H}\mathfrak{n}) = 0; \quad (\mathfrak{H}\mathfrak{D}) = 0.$$

Man sieht: \mathfrak{D} , \mathfrak{E} und \mathfrak{n} sind komplanar, orthogonal zu \mathfrak{H} . Da durch \mathfrak{D} auch \mathfrak{E} bestimmt ist, so ist auch \mathfrak{n} und \mathfrak{H} bestimmt, und damit auch v durch:

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{(\mathfrak{E}\mathfrak{D})}{D^2};$$

ferner ist

$$\frac{v^2}{c^2} (\mathfrak{E}\mathfrak{D}) - E^2 + (\mathfrak{n}\mathfrak{E})^2 = 0; \quad (\mathfrak{n}\mathfrak{E}) = \sqrt{E^2 - D^2 \frac{v^2}{c^2}},$$

also nach (1)

$$\mathfrak{n} = \frac{\mathfrak{E} - \mathfrak{D} \frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{E^2 - D^2 \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\mathfrak{E}D^2 - \mathfrak{D}(\mathfrak{E}\mathfrak{D})}{D\sqrt{E^2 - D^2} - (\mathfrak{E}\mathfrak{D})^2} \quad \text{und} \quad v = \pm \frac{c}{D} \sqrt{\mathfrak{E}\mathfrak{D}}.$$

Die Wellennormale und die Geschwindigkeit sind daher vollständig durch die Schwingungsrichtung \mathfrak{D} bestimmt.

Ist \mathfrak{n} gegeben, so ist (1) ein homogenes lineares Gleichungssystem der 3 Komponenten von \mathfrak{D} . Es ist nur lösbar, falls die Determinante der Koeffizienten verschwindet. Das ergibt eine Gleichung 3. Grades für v^2 (Säkulargleichung), die sich wegen des Verschwindens ihres absoluten Gliedes auf eine 2. Grades reduziert¹⁾.

¹⁾ Man kann aus (1) \mathfrak{E} und \mathfrak{D} eliminieren durch Anwendung der Formel:

$$(\mathfrak{X}\mathfrak{a}\mathfrak{b}) - |\mathfrak{X}|(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = |T| \{ (\mathfrak{X}^{-1}\mathfrak{a} \mathfrak{X}^{-1}\mathfrak{b}) - |\mathfrak{X}^{-1}| (\mathfrak{X}^{-1}\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \},$$

indem man $\mathfrak{a} = \mathfrak{D}$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{n}$, $\mathfrak{X} = \mathfrak{U}$ setzt. Dies ergibt

$$(\mathfrak{U}\mathfrak{D}\mathfrak{n}) = |A| \{ (\mathfrak{U}^{-1}\mathfrak{D}\mathfrak{n}) - |\mathfrak{U}^{-1}| (\mathfrak{D}\mathfrak{n}) \}.$$

Setzt man aus (1) $\mathfrak{D} = \frac{c^2}{v^2} (\mathfrak{E} - \mathfrak{n}(\mathfrak{E}\mathfrak{n}))$ und $\mathfrak{E} = \mathfrak{D} \frac{v^2}{c^2} + \mathfrak{n}(\mathfrak{E}\mathfrak{n})$, so erhält man

$$\frac{v^4}{c^4} + \frac{v^2}{c^2} \{ (\mathfrak{U}^{-1}\mathfrak{n}\mathfrak{n}) - |\mathfrak{U}^{-1}| \} + \frac{(\mathfrak{U}\mathfrak{n}\mathfrak{n})}{|A|} = 0.$$

Aus dieser Gleichung kann man die zwei Werte von v als Funktion von \mathfrak{n} berechnen.

Für ein gegebenes \mathfrak{n} gibt es daher 2. Geschwindigkeiten v_1 und v_2 und zwei Schwingungsrichtungen \mathfrak{D}_1 und \mathfrak{D}_2 . Da für beide $\mathfrak{D}(\mathfrak{n}) = 0$ ist, findet man:

$$\frac{v_1^2}{c^2}(\mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2) - (\mathfrak{E}_1 \mathfrak{D}_2) = 0 = \frac{v_2^2}{c^2}(\mathfrak{D}_2 \mathfrak{D}_1) - (\mathfrak{E}_2 \mathfrak{D}_1).$$

Da also $(\mathfrak{E}_1 \mathfrak{D}_2) = (\mathfrak{E}_2 \mathfrak{D}_1)$ ist [wegen $\mathfrak{E}_1 \mathfrak{U}(\mathfrak{E}_2) = \mathfrak{E}_2 \mathfrak{U}(\mathfrak{E}_1)$ (s. S. 140)], so wird $(\mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2)(v_1^2 - v_2^2) = 0$.

Zu den zwei verschiedenen v gehören also zwei orthogonale \mathfrak{D} ($\mathfrak{D}_1 \perp \mathfrak{D}_2$).

Die Säkulargleichung für v^2 führt bei solcher Wahl des Koordinatensystems, daß die \mathfrak{U}_{ik}^{-1} für $i \neq k$ verschwinden (Transformation auf Hauptachsen), auf die *Fresnelsche Gleichung*; wenn $\mathfrak{U}_{ii}^{-1} = \frac{c^2}{a_i^2}$ gesetzt wird

$$\sum_i \frac{n^2}{a_i^2 - v^2} = 0.$$

Trägt man v als Radiusvektor in allen möglichen Richtungen \mathfrak{n} auf, so erhält man eine Fläche, die *Normalenfläche*.

Es gibt im allgemeinen zwei Richtungen \mathfrak{n} , für die $v_1 = v_2$ wird, die *optischen Achsen*.

Geometrisch kann die Gleichung (1) wie folgt gelöst werden:

Man beschreibt das Ellipsoid $\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{U}^{-1}(\mathfrak{r}) = 1$, schneidet es mit der Ebene $(\mathfrak{n} \mathfrak{r}) = 0$ (die senkrecht zu \mathfrak{n} durch $\mathfrak{r} = 0$ geht), und sucht Richtungen und Längen der Halbachsen, der Schnittellipse. Für diese gilt $\delta(r^2) = 0$. Man erhält:

$$\mathfrak{r} \delta \mathfrak{r} = 0$$

und die Nebenbedingungen:

$$\mathfrak{U}^{-1}(\mathfrak{r}) \delta \mathfrak{r} = 0$$

$$\mathfrak{n} \delta \mathfrak{r} = 0,$$

also

$$\mathfrak{U}^{-1}(\mathfrak{r}) + \sigma_1 \mathfrak{r} + \sigma_2 \mathfrak{n} = 0.$$

Durch Multiplikation mit \mathfrak{n} bzw. \mathfrak{r} folgt

$$\sigma_1 = -\frac{1}{r^2}; \quad \sigma_2 = -\mathfrak{n} \mathfrak{U}^{-1}(\mathfrak{r}),$$

also

$$\mathfrak{U}^{-1}(\mathfrak{r}) - \frac{\mathfrak{r}}{r^2} - \mathfrak{n}(\mathfrak{U}^{-1}(\mathfrak{r}) \mathfrak{n}).$$

Wenn wir in letzterer Gleichung \mathfrak{r} mit \mathfrak{D} , $\mathfrak{U}^{-1}(\mathfrak{r})$ mit \mathfrak{E} und r^2 mit $\frac{c^2}{v^2}$ identifizieren, so geht sie über in unsere Gleichung (1). Die Längen der Halbachsen der Schnittellipse sind demnach gleich $\frac{c}{v_1}$ bzw. $\frac{c}{v_2}$ und ihre Richtungen die von \mathfrak{D}_1 und \mathfrak{D}_2 .

Die Fortpflanzung der Energie erfolgt senkrecht zu \mathfrak{E} und \mathfrak{S} in Richtung von \mathfrak{s} .

\mathfrak{s} sei ein Einheitsvektor ($\mathfrak{s}^2 = 1$) ($\mathfrak{E}\mathfrak{s} = 0$; ($\mathfrak{S}\mathfrak{s} = 0$).

\mathfrak{s} ist komplanar mit \mathfrak{D} , \mathfrak{E} und \mathfrak{n} .

Wir setzen $\mathfrak{D} + \alpha \mathfrak{E} + \beta \mathfrak{s} = 0$. Multiplikation mit \mathfrak{s} bzw. \mathfrak{n} ergibt

$$\beta = -(\mathfrak{D}\mathfrak{s}), \quad \alpha = \frac{(\mathfrak{D}\mathfrak{s})(\mathfrak{n}\mathfrak{s})}{(\mathfrak{E}\mathfrak{n})}.$$

Aus Gleichung (1) folgt

$$\frac{(\mathfrak{D}\mathfrak{s})}{(\mathfrak{E}\mathfrak{n})} = -(\mathfrak{n}\mathfrak{s}) \frac{c^2}{v^2};$$

Wir erhalten also

$$\frac{c^2}{v^2} (\mathfrak{n}\mathfrak{s})^2 \mathfrak{E} - \mathfrak{D} + \mathfrak{s} (\mathfrak{D}\mathfrak{s}) = 0.$$

Es ist aber $(\mathfrak{n}\mathfrak{s}) = \cos \zeta$, wo ζ der Winkel zwischen \mathfrak{n} und \mathfrak{s} ist. Nennen wir S die Geschwindigkeit der Welle in Richtung von \mathfrak{s} , so ist $\frac{v}{S} = \cos \zeta = (\mathfrak{n}\mathfrak{s})$. Es wird also

$$(2) \quad \frac{c^2}{S^2} \mathfrak{E} - \mathfrak{D} + \mathfrak{s} (\mathfrak{D}\mathfrak{s}) = 0.$$

Diese Gleichung hat genau denselben Typus wie die ursprüngliche (1).

Die geometrische Lösung ist hier so zu benutzen, daß im Ellipsoid $r\mathfrak{H}(\mathfrak{r}) = 1$ und die Fläche $(\mathfrak{r}\mathfrak{s}) = 0$ zu beschreiben ist. Die Halbachsen der Schnittellipse liefern dann $r_1 = \frac{S_1}{c}$; $r_2 = \frac{S_2}{c}$ und ihre Richtungen sind diejenigen von \mathfrak{E}_1 und \mathfrak{E}_2 .

Die Fläche mit dem Radiusvektor S in Richtung \mathfrak{s} heißt *Strahlenfläche*.

Schreiben wir $\mathfrak{S} = S\mathfrak{s}$, so wird aus (2)

$$c^2 \mathfrak{E} - \mathfrak{D} S^2 + \mathfrak{S} (\mathfrak{D}\mathfrak{S}) = 0.$$

Multiplikation mit \mathfrak{D} und Variation führt wegen $(\mathfrak{D}\delta \mathfrak{E}) = (\mathfrak{E}\delta \mathfrak{D})$ zu

$$2\delta \mathfrak{D}(c^2 \mathfrak{E} - \mathfrak{D} S^2 + \mathfrak{S} (\mathfrak{D}\mathfrak{S})) - 2\delta \mathfrak{S} (\mathfrak{S} \mathfrak{D}^2 - \mathfrak{D} (\mathfrak{D}\mathfrak{S})) = 0.$$

Der Faktor von $\delta \mathfrak{D}$ ist gleich Null, der von $\delta \mathfrak{S}$ ist ein Vektor parallel zu \mathfrak{n} .

Also gilt $(\mathfrak{n}\delta \mathfrak{S}) = 0$, d. h. \mathfrak{n} steht senkrecht zur Tangentialebene an die Strahlenfläche im Punkte $\mathfrak{r} = \mathfrak{S}$, oder die Wellenfläche ($t = 1$) ist diese Tangentialebene.

Die Strahlenfläche ist daher die Enveloppe aller möglichen Wellenebenen für $t = 1$.

Aus den Gleichungen (1) und (2) lassen sich noch folgende Formeln geringerer Bedeutung ableiten:

$$VS = c^2 \frac{E}{D}; \quad \mathfrak{E} = \frac{c}{\sqrt{\mathfrak{E}\mathfrak{D}}} \frac{\mathfrak{E}(\mathfrak{E}\mathfrak{D}) - \mathfrak{D}E^2}{\sqrt{\mathfrak{E}\mathfrak{D}} \sqrt{\mathfrak{E}(\mathfrak{E}\mathfrak{D})^2 - E^2 D^2}}$$

$$S\mathfrak{A}(n) - V\mathfrak{A}(\mathfrak{s}) = c^2 \left(\frac{n}{S} - \frac{\mathfrak{s}}{V} \right)$$

$$\mathfrak{A}(n)(nS - \mathfrak{s}V) = 0$$

$$H^2 = (\mathfrak{E}\mathfrak{D}).$$

10. Elektrische Maßsysteme.

Das im obigen benutzte Maßsystem heißt das „*Elektrostatische*“.

Außerdem werden noch folgende benutzt:

Elektromagnetisches Maßsystem. Man setzt:

$$e' = \frac{1}{c} e \quad \varepsilon' = \varepsilon$$

$$\varrho' = \frac{1}{c} \varrho \quad \mathfrak{D}' = c\mathfrak{D}$$

$$\mathfrak{E}' = c\mathfrak{E}$$

$$\varphi' = c\varphi$$

$$i' = \frac{1}{c} i \quad \mu' = \mu$$

$$\sigma' = \frac{1}{c^2} \sigma \quad \mathfrak{B}' = \mathfrak{B}$$

$$\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} \quad \mathfrak{A}' = \mathfrak{A}$$

Technisches Maßsystem. (Volt, Ampere, Ohm.)

$$e' = \frac{10^9}{c} \text{ (Coulomb)} \quad \varepsilon' = \varepsilon$$

$$\varrho' = \frac{10^9}{c} \quad \mathfrak{D}' = \mathfrak{D} \cdot 300$$

$$\mathfrak{E}' = \mathfrak{E} \cdot 300 \text{ (Volt/cm)}$$

$$\varphi' = \varphi \cdot 300 \text{ (Volt)}$$

$$i' = \frac{10^9}{c} \text{ Ampere/cm}^2 \quad \mu' = \mu$$

$$\sigma' = \frac{10^{-11}}{9} \sigma$$

$$\mathfrak{H}' = \mathfrak{H}$$

„Rationelles“ Maßsystem. Setzt man

$$\begin{aligned} e' &= e\sqrt{4\pi} & e' &= e \\ \varrho' &= \varrho\sqrt{4\pi} & \mathfrak{D}' &= \frac{\mathfrak{D}}{\sqrt{4\pi}} \\ \mathfrak{E}' &= -\frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{4\pi}} \\ \varphi' &= \frac{\varphi}{\sqrt{4\pi}} \\ i' &= i\sqrt{4\pi} & \mu' &= \mu \\ \sigma' &= \sigma \cdot 4\pi & \mathfrak{B}' &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \mathfrak{B} \\ \mathfrak{H}' &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \mathfrak{H} & \mathfrak{A}' &= -\sqrt{4\pi} \mathfrak{A}, \end{aligned}$$

so hat man für statische Felder (unter Fortlassung des Index!):

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} &= -\frac{e_1 e_2}{4\pi r^2} \mathfrak{r} & \mathfrak{E} &= -\int \frac{\varrho \mathfrak{r}}{4\pi r^2} d\tau & \mathfrak{E} &= e\mathfrak{E} \\ \mathfrak{D} &= e\mathfrak{E} & \operatorname{div} \mathfrak{D} &= \varrho & \mathfrak{E} &= -\operatorname{grad} \varphi & 4\pi\varphi &= \int \frac{\varrho}{r} dv \\ \mathfrak{H} &= \mu \mathfrak{H} & \mathfrak{H} &= \operatorname{rot} \mathfrak{A} & U &= \frac{1}{2} \int dv \{(\mathfrak{E}\mathfrak{D}) + (\mathfrak{H}\mathfrak{H})\} \\ \mathfrak{B} &= \operatorname{rot} \mathfrak{A} \\ \operatorname{div} \mathfrak{B} &= 0 & -4\pi\mathfrak{A} &= \frac{1}{c} \int \frac{\mathfrak{I}}{r} dv, \end{aligned}$$

sowie für zeitlich veränderliche Felder

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathfrak{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathfrak{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} &= \mathfrak{I} = \sigma \mathfrak{E} + \varrho \mathfrak{v} \\ \mathfrak{E} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} &= \operatorname{grad} \varphi; \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathfrak{A} = 0 \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

Literatur.

M. Abraham und A. Föppl: Theorie der Elektrizität (Leipzig: B. G. Teubner).

Dreizehnter Abschnitt.

Relativitätstheorie.

A. Grundbegriffe.

1. Maßsysteme.

Die analytische Darstellung eines physikalischen Gesetzes oder einer physikalischen Tatsache (Beobachtungs- bzw. Meßergebnisses) muß sich notwendigerweise beschränken auf die Festlegung einer *Relation zwischen gemessenen* (oder wenigstens prinzipiell meßbaren) *Zahlen*.

Diese Zahlen heißen *Maßzahlen*. Um sie zu gewinnen, muß durch irgendeine Festsetzung ein System von *Maßeinheiten* festgelegt werden. Das Produkt einer Maßzahl und ihrer Einheit liefert dann die Größe selbst.

Die Zahl der erforderlichen Maßeinheiten ist zunächst so groß wie die Zahl der verschiedenen zu messenden Größen. Durch an sich willkürliche *Meßvorschriften* lassen sie sich auf eine kleinere Zahl zurückführen. Üblich und rationell ist die Zurückführung auf die leicht realisierbaren Einheiten der *Länge, Masse und Zeit*.

Das CGS-System benutzt

die Länge $1 \text{ cm} = 10^{-9}$ Erdquadrant,
die Masse $1 \text{ g} = 1 \text{ cm}^3 \text{ Wasser bei } 4^\circ \text{ C}^1$,
die Zeit $1 \text{ sec} = \frac{1}{86400} \text{ Sonnentag}$.

Andere Maßsysteme, begründet auf andere Maßeinheiten, bestehen daneben.

Anmerkung. Die wünschenswerte Unveränderlichkeit der Maßeinheiten ist teils unkontrollierbar, teils nur wahrscheinlich gemacht durch die mit ihrer Hilfe feststellbaren Unveränderlichkeit eines Naturgesetzes. Frei macht man sich von allen hier möglichen Bedenken nur in der *Relativitätstheorie*.

¹⁾ Diese ursprüngliche Festsetzung wurde später ersetzt durch die Definition:

$1 \text{ cm} = \frac{1}{100}$ des Pariser Normalmeters,
 $1 \text{ g} = \frac{1}{1000}$ des Pariser Normalkilogramms.

2. Dimensionen.

Jede physikalische Gleichung muß eine Bedeutung haben, die unabhängig ist von dem an sich willkürlichen speziellen Maßsystem. Sie muß also kovariant sein gegenüber Maßeinheitsänderungen.

Ist die Maßeinheit einer physikalischen Größe G festgelegt durch die Einheiten der Länge, Masse und Zeit, so ändert sie sich, wenn man zu der l -fachen Längeneinheit, der m -fachen Masseneinheit und der t -fachen Zeiteinheit übergeht um den Faktor $l^{\alpha} m^{\beta} t^{\gamma}$. Die drei für die physikalische Größe charakteristischen Zahlen α, β, γ repräsentieren die „Dimension“ von G . Man schreibt dies in der Form

$$[G] = l^{\alpha} m^{\beta} t^{\gamma}.$$

Die Dimension des Produktes zweier Größen ist gleich dem Produkt ihrer Dimensionen.

Die geforderte Kovarianz gegen Maßeinheitsänderungen kann nur bestehen, falls die Dimensionen der beiden Seiten einer Gleichung dieselben sind.

Da die Maßeinheit um den Faktor $[G]$ wächst, wird die Maßzahl, d. h. die in der Gleichung durch einen Buchstaben symbolisch geschriebene Zahl, um den Faktor $\frac{1}{[G]}$ verkleinert.

B. Vierdimensionale Darstellung der Welt und Relativitätsprinzip.

1. Jedes physikalische „Ereignis“ findet an einem Ort zu einer Zeit statt, liefert also ein Wertesystem $xyz t$. Hier bedeuten xyz die Cartesischen Koordinaten des (3-dimensionalen) Raumes, gemessen mit materiellen Maßstäben, bezogen auf ein beliebig angenommenes Achsensystem und t die Maßzahl der Zeit, gemessen mit relativ zu dem System ruhenden materiellen Uhren.

Die Unveränderlichkeit der Maßstäbe bei den zur Ausmessung vorgenommenen Verschiebungen oder Drehungen gegen das System wird hierbei immer angenommen. Als Kontrolle des gleichen Ganges der Uhren (Definition der Gleichzeitigkeit) werden Lichtsignale als benutzt gedacht, wobei die Lichtgeschwindigkeit unter allen Umständen als im Vakuum konstant $= c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec angenommen wird.

2. Zur geometrischen Darstellung des gesamten zeitlich-räumlichen physikalischen Geschehens kann man sich einer 4-dimensionalen Mannigfaltigkeit (*Welt*) bedienen. In dieser sei jeder Punkt durch die 4 Koordinatenmaßzahlen $x^1 x^2 x^3 x^4$ in einem Cartesischen 4-dimensionalen System festgelegt.

Ein Wertesystem $x^1 x^2 x^3 x^4$ heißt ein *Welt*punkt. Die Abhängigkeit der Lage eines materiellen Punktes im Raum xyz von der Zeit t wird durch eine *Weltlinie* dargestellt. Durch die Gesamtheit der Weltlinien aller Punkte ist das gesamte (meßbare) Naturgeschehen darstellbar.

Es sind dann folgende zwei Darstellungen gebräuchlich:

a) Man identifiziert mit $x^1 x^2 x^3 x^4$ die Größen x, y, z, t .

b) Man identifiziert mit $x^1 x^2 x^3 x^4$ die Größen $x, y, z, l = ict$ ($i = \sqrt{-1}$). Ein Wertesystem $xyzt$ ist dann ein imaginärer Punkt der Welt. Diese Darstellung bietet gewisse mathematische Vorteile. Sie ist aber unanschaulich. Im folgenden gebrauchen wir die Darstellung 1.

3. Nimmt man ein gegen das System xyz gleichförmig mit der Geschwindigkeit v bewegtes anderes Koordinatensystem und mißt wie oben, d. h. mit gegen dieses ruhenden Maßstäben und Uhren, die Koordinaten und die Zeit desselben Ereignisses, so erhält man ein Wertesystem $x'y'z't'$, das an Stelle der $xyzt$ mit den $x^1 x^2 x^3 x^4$ identifiziert werden kann.

Die spezielle *Relativitätstheorie* sagt dann aus, daß die *Naturgesetze*, dargestellt in den $x^1 x^2 x^3 x^4$ *gleichlauten, unabhängig davon*, ob man diese mit den $xyzt$ oder den $x'y'z't'$ identifiziert. (Es ist zu beachten, daß wir unter den Naturgesetzen die Relationen verstehen, die zwischen den durch Messung mit Maßstäben und Uhren gewonnenen Maßzahlen der physikalischen Größen bestehen. Wenn sich also auch bei der relativen Bewegung der Systeme die Maßeinheiten ändern mögen [was nicht kontrollierbar ist], so sollen die Relationen zwischen den gewonnenen Zahlen erhalten bleiben.)

C. Lorentztransformation.

4. Die Anwendung des Relativitätspostulats (z. B. auf die Kinetik der Lichtausbreitung) führt auf folgende Beziehungen (*Lorentz-Transformation*), wenn man die Koordinaten x, y, z als Komponenten des Ortsvektors r nimmt

$$r' = r - v \left(\frac{(r \cdot v)}{v^2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) + \frac{t}{\sqrt{1-\beta^2}} \right); \quad t' = \frac{t - \frac{(v \cdot r)}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

5. Das vollständige Transformationschema lautet also:

	x	y	z	t
x'	$1 - \frac{v_x^2}{v^2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)$	$\frac{-v_x v_y}{v^2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)$	$\frac{-v_x v_z}{v^2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)$	$\frac{-v_x}{\sqrt{1-\beta^2}}$
y'	$\frac{-v_x v_y}{v^2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)$	$1 - \frac{v_y^2}{v^2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)$	$\frac{-v_y v_z}{v^2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)$	$\frac{-v_y}{\sqrt{1-\beta^2}}$
z'	$\frac{-v_x v_z}{v^2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)$	$\frac{-v_y v_z}{v^2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)$	$1 - \frac{v_z^2}{v^2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)$	$\frac{-v_z}{\sqrt{1-\beta^2}}$
t'	$\frac{-v_x}{c^2 \sqrt{1-\beta^2}}$	$\frac{-v_y}{c^2 \sqrt{1-\beta^2}}$	$\frac{-v_z}{c^2 \sqrt{1-\beta^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

Hieraus folgt für $v_y = v_z = 0$; $v_x = v$ das der speziellen *Lorentz-Transformation*:

	x	y	z	t
x'	$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$	0	0	$\frac{-v}{\sqrt{1-\beta^2}}$
y'	0	1	0	0
z'	0	0	1	0
t'	$\frac{-v}{c^2 \sqrt{1-\beta^2}}$	0	0	$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

Die Transformation hat die Determinante 1.

6. Hieraus folgt, daß der 4-dimensionale „Abstand“ zweier Welt-punkte $x_1 y_1 z_1 t_1$ und $x_2 y_2 z_2 t_2$

$$\begin{aligned} \Delta s &= \sqrt{-(x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2 + c^2 (t_1 - t_2)^2} \\ &= \sqrt{-(r_1 - r_2)^2 + c^2 (t_1 - t_2)^2} \end{aligned}$$

eine Invariante ist, d. h. unverändert bleibt, wenn man ihn durch die $x' y' z' t'$ in derselben Form schreibt:

$$\begin{aligned} \Delta s &= \sqrt{-(x'_1 - x'_2)^2 - (y'_1 - y'_2)^2 - (z'_1 - z'_2)^2 + c^2 (t'_1 - t'_2)^2} \\ &= \sqrt{-(r'_1 - r'_2)^2 + c^2 (t'_1 - t'_2)^2}. \end{aligned}$$

Ist also für ein bestimmtes System $xyzt$ das Weltbild (dargestellt durch die Weltlinien) bekannt, so erhält man das Weltbild für ein anderes System $x'y'z't'$ durch eine Deformation (Transformation), die den „Abstand“ Δs aller Weltpunkte unverändert läßt.¹⁾

7. Ist Δs imaginär, so ist es durch eine *Lorentz-Transformation* immer möglich, $t'_1 - t'_2$ verschwinden zu lassen. Die beiden Ereignisse erscheinen im geeigneten Bezugssystem als *gleichzeitig*. (*Transformation auf Gleichzeitigkeit*.)

Ist Δs reell, so ist es möglich, Δs auf die Form $\sqrt{c^2 (t'_1 - t'_2)^2}$ zu transformieren. Die Ereignisse erscheinen als am selben Ort stattfindend (*Transformation auf Ruhe*).

Ist $\Delta s = 0$, so sind die beiden Ereignisse durch eine Raum-distanz Δr und eine Zeitdistanz Δt so getrennt, daß $\frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{\Delta r'}{\Delta t'} = c$ ist.

Sind die beiden Weltpunkte 1 und 2 zwei infinitesimal benachbarte Punkte der Weltlinie eines bewegten Punktes, so ist Δs immer reell; für den Fall der Lichtgeschwindigkeit des Punktes wird $\Delta s = 0$.

¹⁾ Führt man an Stelle von t die Größe $l = ict$ und $l' = ict'$ ein, so wird die Transformation orthogonal (Drehung).

$d\tau = \frac{1}{c} ds$ heißt das Differential der „Eigenzeit“ des Punktes. Ist der Punkt auf Ruhe transformiert, so ist $d\tau = dt'$.

8. Die *Lorentz-Transformation* angewandt auf einen mit der Geschwindigkeit w relativ zum 1. System bewegten Punkt liefert die Geschwindigkeit w' relativ zum 2. System.

Es ist

$$w = \frac{dx}{dt},$$

also

$$w' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{w \sqrt{1-\beta^2} - v \left\{ \frac{(wv)}{c^2} (\sqrt{1-\beta^2} - 1) + 1 \right\}}{1 - \frac{(wv)}{c^2}}.$$

Ist speziell $w \parallel v$, so wird:

$$w' = v \frac{\left(\frac{w}{v} - 1\right)}{1 - \frac{wv}{c^2}} \quad \text{oder} \quad w' = \frac{w - v}{1 - \frac{wv}{c^2}} \quad (\text{Additionstheorem der Geschwindigkeiten}).$$

Ist $w \perp v$, so wird:

$$w' = w \sqrt{1-\beta^2} - v \quad \text{oder} \quad w'^2 = w^2 + v^2 - \frac{v^2 w^2}{c^2}.$$

Anwendung. In einer mit der Geschwindigkeit v strömenden Flüssigkeit laufe ein Lichtstrahl mit der Geschwindigkeit $w' = \frac{c}{n}$ (n = Brechungsindex) in der Richtung der Bewegung. Dann ist seine Geschwindigkeit im ruhenden System

$$\begin{aligned} w &= \frac{\frac{c}{n} + v}{1 + \frac{v}{n \cdot c}} = \left(\frac{c}{n} + v\right) \left(1 - \frac{v}{nc} + \dots\right) \\ &= v + \frac{c}{n} - \frac{v^2}{nc} - \frac{v}{n^2} + \dots \\ w &= \frac{c}{n} + v \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + \dots \end{aligned}$$

$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ heißt *Mitführungskoeffizient*.

9. Statt (nach 6) die *Lorentz-Transformation* als eine Deformation des Weltbildes zur Darstellung in einem anderen Koordinatensystem aufzufassen, kann man sie auch (vgl. S. 76) als eine Transformation der Koordinaten des (unverändert gelassenen) Weltbildes betrachten. Wir haben dann eine affine Transformation des Koordinatensystems, bei der das Linienelement ds invariant ist. Zur Darstellung der Naturgesetze bedient man sich dann mit Vorteil der 4-dimensionalen Vektoranalysis im Weltbild. Die Komponenten p^i eines Vektors p transformieren sich dann wie die Koordinaten x^i ; $p'^i = \sum a_k^i p^k$, wo die

a_k^i aus dem Schema 5 zu entnehmen sind. Tensoren transformieren sich nach der Regel:

$$T'^{lm} = \sum_i \sum_m a_i^l a_m^n T^{in} \quad (\text{vgl. S. 174}).$$

Wegen

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2 dt^2$$

wird

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1; \quad g_{44} = c^2; \quad g_{ik} = 0 \text{ für } i \neq k \quad |g| = -c^2.$$

Die obigen Werte für g_{ik} gelten für alle Bezugssysteme.

Folgende Beziehungen gelten daher zwischen den kovarianten und kontravarianten Komponenten von Vektoren aus Tensoren

$$p_i = -p^i \text{ für } i = 1, 2, 3$$

$$p_4 = c^2 p^4$$

$$T_{ik} = T^{ik} \text{ für } i = 1, 2, 3; \quad k = 1, 2, 3$$

$$T_{i4} = -c^2 T^{i4} \text{ für } i = 1, 2, 3$$

$$T_{44} = c^4 T^{44}$$

und

$$T^i_k = -T_{ik}$$

$$T^i_4 = c^2 T_{i4}$$

$$T^4_i = -T_{i4}$$

$$T^4_4 = c^2 T_{44}$$

Das Transformationsschema für die Komponenten eines Tensors wird also bei der speziellen Lorentz-Transformation ($v_y = v_z = 0; v_x = v$):

	11	12	13	14	21 22 23 24	31 32 33 34	41 42 43 44
11	$\frac{c^2}{c^2 - v^2}$	0	0	$\frac{-v c^2}{c^2 - v^2}$			$\frac{-v c^2}{c^2 - v^2}$ 0 0 $\frac{+v^2 c^2}{c^2 - v^2}$
12	0	$\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$	0	0	0	0	0 $\frac{-v}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ 0 0
13	0	0	$\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$	0			0 0 $\frac{-v}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ 0
14	$\frac{-v}{c^2 - v^2}$	0	0	$\frac{c^2}{c^2 - v^2}$			$\frac{v^2}{c^2 - v^2}$ 0 0 $\frac{-v^2 c^2}{c^2 - v^2}$
21					$\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ 0 0 $\frac{-v}{\sqrt{1 - \beta^2}}$		
22					0 1 0 0		
23		0			0 0 1 0	0	0
24					$\frac{-v}{c^2 \sqrt{1 - \beta^2}}$ 0 0 $\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$		

	11	12	13	14	21 22 23 24	31 32 33 34	41 42 43 44
31						$\frac{1}{\sqrt{}} 0 0 \frac{-v}{\sqrt{}}$	
32						$0 1 0 0$	
33		0			0	$0 0 1 0$	0
34						$\frac{-v}{c^2 \sqrt{}} 0 0 \frac{1}{\sqrt{}}$	
41	$\frac{-v}{c^2 - v^2}$	0	0	$\frac{v^2}{c^2 - v^2}$			$\frac{c^2}{c^2 - v^2} 0 0 \frac{-v^2}{1 - \beta^2}$
42	0	$\frac{-v}{c^2 \sqrt{}}$	0	0	0	0	$0 \frac{1}{\sqrt{}} 0 0$
43	0	0	$\frac{-v}{c^2 \sqrt{}}$	0			$0 0 \frac{1}{\sqrt{}} 0$
44	$\frac{v^2}{c^2 (c^2 - v^2)}$	0	0	$\frac{-v}{c^2 - v^2}$			$\frac{-v}{c^2 - v^2} 0 0 \frac{c^2}{c^2 - v^2}$

und daraus für einen antisymmetrischen Tensor:

	14	24	34	23	31	12
14	1	0	0	0	0	0
24	0	$\frac{1}{\sqrt{}}$	0	0	0	$\frac{+v}{c^2 \sqrt{}}$
34	0	0	$\frac{1}{\sqrt{}}$	0	$\frac{-v}{c^2 \sqrt{}}$	0
23	0	0	0	1	0	0
31	0	0	$\frac{-v}{\sqrt{}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{}}$	0
12	0	$\frac{+v}{\sqrt{}}$	0	0	0	$\frac{1}{\sqrt{}}$

D. Physikalische Bedeutung vierdimensionaler Vektoren und Tensoren.

Die Komponenten eines Vektors p^i lassen sich physikalischen (meßbaren) Größen zuordnen.

Die drei ersten Komponenten sind die Komponenten eines räumlichen Vektors $\frac{v}{c \sqrt{1 - \beta^2}}$, die vierte hat eine abweichende Bedeutung.

Sie ist durch die Dimension einer Geschwindigkeit von den andern unterschieden. Sie kann nur einen Skalar bedeuten. Der Betrag des Vektors $p = \sqrt{p^i p^i g_{ii}}$ muß eine Invariante sein, also eine Größe, die für alle Bezugssysteme denselben Wert hat.

Die Aufstellung der Vektorgleichungen der Relativitätstheorie muß im Anschluß an die Erfahrung erfolgen. Sie ist in vielen Fällen nicht ohne Modifikation der älteren Anschauungen durchzuführen.

Der Einheitsvektor in Richtung einer Weltlinie $u^i = \frac{dx^i}{ds}$ hat die Komponenten

$$u^1 = \frac{v_x}{c\sqrt{1-\beta^2}}; \quad u^2 = \frac{v_y}{c\sqrt{1-\beta^2}}; \quad u^3 = \frac{v_z}{c\sqrt{1-\beta^2}}; \quad u^4 = \frac{1}{c\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Folgende Vektoren und ihre räumlich-zeitliche Deutung haben sich bewährt:

Weltvektor	Räumlicher Anteil	Zeitlicher Anteil	Invarianter Betrag
u^i	$\frac{v}{c\sqrt{1-\beta^2}}$	$\frac{1}{c\sqrt{1-\beta^2}}$	1
s^i	$i = \text{Stromdichte}$	$\varrho = \text{Ladungsdichte}$	$\sqrt{c^2 \varrho^2 - i^2}$
φ^i	$a = \text{Vektorpotential}$	$\frac{\varphi}{c} = \frac{\text{Skalar-Potential}}{c}$	$c\sqrt{\varphi^2 - a^2}$
p^i	$p = \text{Kraftdichte}$	$\frac{\lambda}{c^2} = \frac{\text{Leistungsdichte}}{c^2}$	$\sqrt{\frac{\lambda^2}{c^2} - p^2}$

In analoger Weise sind die Komponenten eines Tensors zu deuten. Folgende Tensoren und ihre Bedeutungen werden benutzt,

wobei \mathcal{E} = elektrische Feldstärke

\mathcal{H} = magnetische Feldstärke

\mathfrak{D} = elektrische Verschiebung

\mathfrak{B} = magnetische Induktion bedeutet.

$F^{ik} = -F^{ki}$	$i \backslash k$	1	2	3	4	$(F^2) = F^{ik} F_{ik} = 2(\mathcal{B}^2 - \mathcal{E}^2)$
	1	0	B_x	$-B_y$	$-\frac{E_z}{c}$	
	2	$-B_x$	0	B_z	$-\frac{E_y}{c}$	
	3	B_y	$-B_z$	0	$-\frac{E_x}{c}$	
	4	$\frac{E_x}{c}$	$\frac{E_y}{c}$	$\frac{E_z}{c}$	0	
$H^{ik} = -H^{ki}$	$i \backslash k$	1	2	3	4	$(H^2) = H^{ik} H_{ik} = 2(H^2 - D^2)$
	1	0	H_x	$-H_y$	$-\frac{D_z}{c}$	
	2	$-H_x$	0	H_z	$-\frac{D_y}{c}$	
	3	H_y	$-H_z$	0	$-\frac{D_x}{c}$	
	4	$\frac{D_x}{c}$	$\frac{D_y}{c}$	$\frac{D_z}{c}$	0	

$(FH) = F^{ik} H^{jl} g_{ik} g_{jl} = 2(\mathfrak{B} \mathfrak{H}) - (\mathcal{E} \mathfrak{D})$

$$S^{ik} = \frac{e^{ik}}{4} (FH) - \frac{1}{2} (F^{iv} H^{kl} + F^{kr} H^{il}) g_{rl};$$

$$S^{11} = \frac{1}{2} (E_y D_y + E_z D_z - E_x D_x + H_y B + H_z B_z - H_x B_x)$$

$$S^{12} = -E_x D_y - H_x B_y \quad \text{usw.}$$

$$S^{14} = \frac{1}{2c} ([\mathfrak{D} \mathfrak{B}] + [\mathfrak{E} \mathfrak{H}])_x$$

$$S^{44} = \frac{1}{2c^2} ((\mathfrak{E} \mathfrak{D}) + (\mathfrak{H} \mathfrak{B})).$$

S^{ik} für $i = 1, 2, 3$, $k = 1, 2, 3$ sind also die Komponenten des *symmetrischen Maxwell'schen Spannungstensors* (\mathfrak{S}). $\frac{c^2}{4\pi} S^{4i}$ sind die i Komponenten des *Poynting'schen Vektors*. $\frac{c^2}{4\pi} S^{44}$ ist die *Energiedichte* W .

E. Elektrodynamik.

Die elektrodynamischen Gesetze stellen sich dann folgendermaßen dar:

$$(1) \quad \frac{\partial s^i}{\partial x^i} = 0, \quad \left(\text{div } \mathfrak{t} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0 \right)$$

$$(2) \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^i} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^k} = -F_{ik} \quad \left(\mathfrak{B} = \text{rot } \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} \right),$$

wobei für φ^i gelten soll

$$\frac{\partial \varphi^i}{\partial x^i} = 0, \quad \left(\text{div } \mathfrak{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \right).$$

$$(3) \quad \frac{\partial F_{k1}}{\partial x^1} + \frac{\partial F_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x^3} = 0 \quad \left(\text{div } \mathfrak{B} = 0, \quad \text{rot } \mathfrak{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} \right)$$

$$(4) \quad p^i = \frac{F^{ik} \mathfrak{H}_k}{c} \quad (p = \varrho \mathfrak{E} + [\mathfrak{t} \mathfrak{B}]; \quad \lambda = (\mathfrak{E} \mathfrak{t}))$$

$$(5) \quad \frac{\partial H^{ik}}{\partial x^k} = \frac{4\pi s^i}{c} \quad \left(\text{rot } \mathfrak{H} = \frac{4\pi \mathfrak{i}}{c} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}; \quad \text{div } \mathfrak{D} = 4\pi \varrho \right)$$

$$(6) \quad p^i = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial S^{ik}}{\partial x^k} \quad \left(p = \text{div } \mathfrak{S} + \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} [\mathfrak{D} \mathfrak{B}]; \right.$$

$$\left. \lambda = -\frac{c}{4\pi} \text{div} [\mathfrak{E} \mathfrak{H}] - \frac{\partial W}{\partial t} \right).$$

Im Vakuum ist $F^{ik} = H^{ik}$.

Für $F^{ik} = H^{ik}$ kann man aus den Formeln (2) und (5) F^{ik} eliminieren und findet:

$$\frac{4\pi s^i}{c} = -\square \varphi^i,$$

wo

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

bedeutet.

Setzt man

$$\varphi^i = \frac{\partial Z^{ik}}{\partial x^k} \quad \text{und} \quad s^i = \frac{\partial Q^{ik}}{\partial x^k} \quad (Z^{ik} = -Z^{ki}, Q^{ik} = -Q^{ki})$$

so findet man

$$\frac{4\pi Q^{ik}}{c} = -\square Z^{ik}.$$

Z^{ik} entspricht dem *Hertz'schen* Vektor \mathfrak{Z} .

Diese Gleichung läßt sich in affinen Koordinatensystemen leicht integrieren.

F. Elektrodynamik in (bewegten) Medien.

Die allgemeine Beziehung zwischen F^{ik} und H^{ik} muß so sein, daß für ein relativ zur Materie ruhendes Bezugssystem $\mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E}$; $\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$ wird. Hier gilt außerdem $t = \sigma \mathfrak{E}$.

Um diese Beziehungen kovariant auszudrücken, bildet man eine Reihe von neuen Vektoren und Tensoren.

$$(1) \quad e^i = F^{ik} u_k,$$

wo u^k der Einheitsvektor $\frac{dx^k}{ds}$ in Richtung der Weltlinie der Materie ist.

$$(2) \quad d^i = H^{ik} u_k.$$

Für ein Bezugssystem, in dem die Materie ruht, ist dann

$$u^1 = u^2 = u^3 = 0; \quad u^4 = \frac{1}{c}.$$

Hier wird

$$e^i = c F^{i4},$$

also

$$e^1 = E_x, \quad e^2 = E_y, \quad e^3 = E_z, \quad e^4 = 0$$

und

$$d^1 = D_x, \quad d^2 = D_y, \quad d^3 = D_z, \quad d^4 = 0.$$

Die kovariante Gleichung $d^i = \varepsilon e^i$ gilt also im geeigneten Bezugssystem und daher allgemein. Es ist also:

$$\mathfrak{D} + \frac{1}{c} [\mathfrak{v} \mathfrak{H}] = \varepsilon \left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c} [\mathfrak{v} \mathfrak{B}] \right).$$

Wir bilden ferner:

$$(3) \quad b^{ihl} = F^{ih} u^l + F^{hl} u^i + F^{li} u^h, \quad \text{wo } i \neq l \neq h.$$

Für $u^1 = u^2 = u^3 = 0; \quad u^4 = \frac{1}{c}$

wird

$$b^{234} = -\frac{B_x}{c}; \quad b^{341} = \frac{B_y}{c}; \quad b^{412} = \frac{B_z}{c}, \quad b^{123} = 0 \quad \text{usw.}$$

$$(4) \quad h^{ihl} = H^{ih} u^l + H^{hl} u^i + H^{li} u^h.$$

Die kovariante Gleichung $b^{ihl} = \mu h^{ihl}$ liefert:

$$\mathfrak{E} - \frac{1}{c} [v \mathfrak{E}] = \mu \left(\mathfrak{S} - \frac{1}{c} [v \mathfrak{D}] \right).$$

$\mathfrak{E} + \frac{1}{c} [v \mathfrak{S}]$ heißt *elektromotorische Kraft*,

$\mathfrak{S} - \frac{1}{c} [v \mathfrak{D}]$ heißt *magnetomotorische Kraft*.

Um die Beziehung $i = \sigma \mathfrak{E}$ kovariant darzustellen, beachte man, daß s^i in Richtung der Weltlinie die Komponente $u^i (s^h u_h)$ hat. Dies ist der *Konvektionsstrom* der geladenen Materie. Die obige Gleichung bezieht sich aber nur auf den *Leitungsstrom*, also auf

$$l^i = s^i - u^i (s^h u_h).$$

Für $u^1 = u^2 = u^3 = 0; \quad u^4 = \frac{1}{c}$ wird

$$l^1 = i_x; \quad l^2 = i_y; \quad l^3 = i_z; \quad l^4 = \varrho - \frac{1}{c} (\varrho c) = 0.$$

Wir haben hier wegen $\varrho = 0$ einen reinen Leitungsstrom in ungeladener Materie.

Im ruhenden System und daher allgemein gilt also

$$l^i = s^i - u^i (s^h u_h) = \sigma \varepsilon^i,$$

d. h.

$$i + \frac{v((v) - \varrho c^2)}{c^2 - v^2} = \frac{\sigma \left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c} [v \mathfrak{S}] \right)}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Für einen reinen Konvektionsstrom

$$i = \varrho v, \quad h^i = u^i (s^h u_h) = u^i \varrho_0 \cdot c$$

wird

$$h^1 = \frac{v_x (\varrho c^2 - (i v))}{c^2 - v^2} = v_x \cdot \varrho = u^1 \cdot c \cdot \varrho_0,$$

$$h^4 = \varrho$$

so daß

$$\varrho = \frac{\varrho_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad \varrho_0 \text{ heißt Ruhdichte der Ladung.}$$

$$p^i = c \varrho_0 F^{ih} u_h \quad \text{liefert} \quad p = \varrho (\mathfrak{E} + [v \mathfrak{S}]).$$

G. Dynamik der Masse.

Das Grundgesetz der Mechanik $\frac{\mu dv}{dt} = p$ definiert (für kleines v) die Massendichte μ .

Die entsprechende kovariante Form kann nur lauten

$$(1) \quad c^2 \mu_0 \frac{du^k}{ds} = p^k,$$

wo μ_0 die Dichte für $v = 0$ bedeutet. Integriert über den Bereich

$$dV = dx^1 dx^2 dx^3$$

ergibt

$$(2) \quad c^2 \mu_0 \int \frac{du^k}{ds} dV = \int p^k dV = P^k.$$

Nun ist $dV = dV_0 \sqrt{1 - \beta^2}$, wo V_0 das Volumen, im mitbewegten Bezugssystem gemessen, bedeutet. Setzen wir

$$(3) \quad m_0 = \int \mu_0 dV_0 \quad (\text{Ruhmasse}),$$

so wird

$$(2') \quad P^k = c^2 m_0 \cdot \sqrt{1 - \beta^2} \frac{du^k}{ds} = c m_0 \cdot \frac{du^k}{dt},$$

also lautet die von der Relativitätstheorie geforderte Bewegungsgleichung:

$$(4) \quad m_0 \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{v}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) = \mathfrak{P}.$$

Setzen wir

$$\frac{dv}{dt} = b \quad (\text{Beschleunigung}), \quad \frac{d(v^2)}{dt} = 2(vb),$$

so wird

$$\mathfrak{P} = m_0 \cdot \left(\frac{b}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \frac{v(bv)}{c^2 \sqrt{1 - \beta^2}} \right),$$

also für $b \parallel v$

$$(5) \quad \mathfrak{P} = \frac{m_0 \cdot b}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \text{longitudinale Masse}$$

und für $b \perp v$

$$(6) \quad \mathfrak{P} = \frac{m_0 \cdot b}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \text{transversale Masse}.$$

Der Impuls wird also $= \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \beta^2}}$, die Energie $E = \frac{c^2 m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$; dieses entwickelt, liefert

$$(7) \quad E = m_0 c^2 + \frac{m_0}{2} v^2 + \dots$$

Das zweite Glied ist die kinetische Energie.

Für $v = 0$ folgt $m_0 = \frac{E_0}{c^2}$. Dies kann so gedeutet werden, daß die Masse m_0 *energetischen Ursprungs* ist (doch ist zu beachten, daß noch eine eventuelle Integrationskonstante hinzugefügt werden kann).

Führt man den Tensor $K^{ik} = c^2 \mu_0 u^i u^k$ ein, so wird wegen

$$(8) \quad \frac{\partial(\mu_0 u^k)}{\partial x^k} = 0 \quad (\text{Kontinuitätsgleichung der Materie}).$$

$$p^i = \frac{\partial K^{ik}}{\partial x^k}; \quad K^{ik} \text{ heißt „kinetischer Impuls-Energietensor“}.$$

Analog der Elektrodynamik lassen sich (wie in der Elektrizitätstheorie) die Kräfte in der Materie durch einen Spannungstensor P^{ik} darstellen.

$$p^i = - \frac{\partial P^{ik}}{\partial x^k}; \quad P^{ik} \text{ heißt „potentieller Impuls-Energietensor“}.$$

Für ein abgeschlossenes System gilt dann:

$$(9) \quad \frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k} (K^{ik} + P^{ik}) = 0.$$

Hierin sind die Erhaltungssätze des Impulses und der Energie ausgedrückt.

T^{ik} heißt der „gesamte Impuls-Energietensor“.

H. Allgemeine Relativitätstheorie.

1. Die spezielle Relativitätstheorie hat die Forderung aufgestellt, daß alle Naturgesetze Beziehungen darstellen sollen zwischen Skalaren, Vektoren oder Tensoren einer vierdimensionalen *euklidischen* Mannigfaltigkeit, deren Linienelement also immer auf die Form:

$$ds^2 = c^2 (dx^4)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$$

gebracht werden kann. Die Grundgesetze der Physik bleiben dann kovariant gegenüber allen Lorentztransformationen.

Gehen wir aus von einer *nicht-euklidischen* Mannigfaltigkeit, so müssen wir die allgemeine Form

$$(1) \quad ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$$

zugrunde legen. Die Tensorgleichungen erscheinen dann in einer Form, die *beliebigen Transformationen* der Koordinaten x^i gegenüber kovariant bleibt. Es treten jetzt in diesen Gleichungen auch die g_{ik} -Komponenten des „*metrischen Fundamentaltensors*“ als Funktionen des Ortes auf. Im Gegensatz zur speziellen Theorie betrachtet die allgemeine Relativitätstheorie die Ortsabhängigkeit des Fundamentaltensors als wesentliches Bestimmungsstück des physikalischen Feldes. Das Linienelement kann dann wohl noch in jedem Punkte auf die *Minkowskische* Form gebracht werden, nicht aber in endlichen Bereichen.

Die nächstliegende differentialgeometrische Charakterisierung des Linienelements kann durch den verjüngten *Riemannschen* Krümmungstensor R_{ik} (vgl. S. 176) gegeben werden. In einer euklidischen Mannigfaltigkeit verschwindet derselbe identisch im ganzen Gebiet. *Einstein* stellt die Theorie auf, daß R_{ik} nur an solchen Stellen verschwindet, wo keine Materie vorhanden ist, während es im übrigen durch den gesamten Spannungs-Energietensor der Materie bestimmt wird. Der Zusammenhang wird geregelt durch die Erhaltungssätze von Impuls und Energie. Die Dynamik lieferte als oberstes Grundgesetz, daß die *Divergenz des Welttensors \mathfrak{E} der Materie* (Summe des mechanischen und elektromagnetischen Anteiles) *verschwindet*:

$$(2) \quad \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} T_i^s}{\partial x^s} - \left\{ \begin{matrix} i s \\ r \end{matrix} \right\} T_r^s = 0.$$

Auch aus dem Krümmungstensor läßt sich ein Tensor bilden, dessen Divergenz identisch verschwindet, nämlich:

$$(3) \quad R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R.$$

Die *Einsteinsche* Theorie macht nun den Ansatz:

$$(4) \quad R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \kappa T_{ik},$$

wo κ eine universelle Konstante ist. Die Diskussion dieser Gleichung führt zu Konsequenzen, die mit den Gravitationserscheinungen im Einklang sind, wenn man

$$(5) \quad \kappa = \frac{8\pi f}{c^3} = 1,87 \cdot 10^{-27} \text{ cm/g}$$

setzt, wo f die Gravitationskonstante bedeutet. Der Impuls-Energiesatz ist jetzt eine notwendige Folge der Feldgleichungen.

2. Infolge des außerordentlich kleinen Wertes von κ werden die praktisch vorkommenden Abweichungen vom *Minkowskischen* Linienelement selbst bei großen Massen äußerst gering. Man kann sich daher (wenn nicht geradezu interstellare Räume in Frage kommen) auf *unendlich schwache Felder* beschränken, d. h. man setzt:

$$(6) \quad g_{ik} = \delta_{ik} + \kappa \gamma_{ik} \quad \left(\begin{matrix} \delta_{ik} = 1, & \text{wenn } i = k \\ \delta_{ik} = 0, & \text{" } i \neq k \end{matrix} \right)$$

und vernachlässigt die Potenzen von κ . (Als x^4 ist jetzt $t = ict$ angenommen.)

Die Krümmungskomponenten drücken sich dann in einer besonders einfachen Form aus, insbesondere, wenn man (was immer möglich ist) ein Koordinatensystem zugrunde legt, in dem

$$(7) \quad \frac{\partial \gamma_i^s}{\partial x^s} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_s^s}{\partial x^i} = 0$$

ist. Es wird dann:

$$(8) \quad R_{ik} = \frac{\kappa}{2} \square \gamma_{ik}$$

und die Feldgleichungen geben:

$$(9) \quad \frac{1}{2} \square \gamma_{ik} = T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} T. \quad (T = T^a_a)$$

Die allgemeinen Gleichungen sind *nichtlinearer Art* und können durch sukzessive Approximationen integriert werden.

3. Die Abweichung der Weltmetrik von der Euklidizität macht sich in den *Gravitationserscheinungen* bemerkbar. Die Bewegung eines Massenpunktes in einem Gravitationsfelde ist nach der *Einsteinschen* Theorie eine *kräftefreie Bewegung*, d. h. infolge des Trägheitsgesetzes ist die Weltlinie eines freien Massenpunktes eine *geodätische Linie*:

$$(10) \quad p^i = m_0 \left(\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} rs \\ i \end{matrix} \right\} \frac{dx^r}{ds} \frac{dx^s}{ds} \right) = 0.$$

Die infolge der Klammerausdrücke auftretenden Zusatzglieder können als „*Scheinkraft*“ gedeutet werden, nach Art der Zentrifugal- und Korioliskräfte, die ebenfalls dadurch zustande kommen, daß in einem rotierenden Bezugssystem auch bei der euklidischen Metrik nicht sämtliche $\left\{ \begin{matrix} rs \\ i \end{matrix} \right\}$ verschwinden. Alle Scheinkräfte haben die charakteristische Eigenschaft, der *trägen Masse proportional* zu sein. Infolge der experimentell mit großer Genauigkeit erwiesenen *Proportionalität zwischen gravitierender und träger Masse* zeigt auch die *Newtonsche* Gravitationskraft diese Eigentümlichkeit.

Das Einkörperproblem.

Die *kugelsymmetrische Lösung* der Feldgleichungen für den leeren Raum:

$$(1) \quad R_{ik} = 0$$

kann immer auf folgende Form gebracht werden (*Schwarzschildsches Linienelement*):

$$(2) \quad ds^2 = - \frac{dr^2}{1 - \frac{\alpha}{r}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + c^2 \left(1 - \frac{\alpha}{r} \right) dt^2. \quad (r > \alpha)$$

α ist eine Konstante und wird als „*Gravitationsradius*“ der zentralen Masse M bezeichnet:

$$(3) \quad \alpha = \frac{2fM}{c^2} = \frac{\kappa}{4\pi} M.$$

Für die Sonne hat α den Wert: $1,47 \cdot 10^5$ cm.

Die Gleichung der geodätischen Linien hat in der Ebene $\varphi = \text{const}$ folgende intermediäre Integrale:

$$(4) \quad r^2 \frac{d\theta}{ds} = \text{const} \quad (\text{Flächensatz})$$

$$(4a) \quad \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) \frac{dt}{ds} = \text{const} \quad (\text{Energiesatz}).$$

Die Bahnkurve hat die Differentialgleichung:

$$(5) \quad \frac{ds}{d\phi} = \sqrt{s^2 \varrho_0^2 - \varrho^2 \sqrt{1 - 3\alpha\varrho_0 - \alpha\varrho}},$$

wo $\varrho = \frac{1}{r} - \varrho_0$ gesetzt ist. Die exakte Integration führt auf ein elliptisches Integral; infolge der Kleinheit von α kann aber das Glied $\alpha\varrho$ vernachlässigt werden, und man hat dann:

$$(6) \quad r = \frac{1}{\varrho_0 \left[1 + s \cos \left(1 - \frac{3\alpha}{2} \varrho_0 \right) \phi \right]}.$$

Das sind die *Keplerschen Ellipsenbahnen* mit $\varrho_0 = \frac{1}{a(1-s^2)}$. Infolge des Faktors von ϕ tritt aber eine *Perihelpräzession* auf von der Größe $3\pi\alpha\varrho_0 = \frac{6\pi fM}{c^2 a(1-s^2)}$ pro Umlauf. Beim Merkur erreicht diese Präzession 43" im Jahrhundert.

Unter den geodätischen Linien gibt es auch solche von der Bogenlänge 0. Man nennt sie die *geodätischen Nulllinien* und erhält sie z. B., indem man die Konstante des Flächensatzes $= \infty$ setzt. Die Weltlinien der *Lichtstrahlen* sind geodätische Nulllinien. Ihre Bahnlinien sind in erster Näherung schwach gekrümmte Hyperbeln mit dem Asymptotenwinkel:

$$\omega = 2 \frac{\alpha}{r_0},$$

wenn r_0 die größte Sonnennähe bedeutet. Für einen am Sonnenrand vorbeieilenden Lichtstrahl ist $\omega = 1,77''$. Diese *Lichtablenkung* ist doppelt so groß, als wenn man nach der Emissionstheorie und der *Newtonschen* Mechanik rechnet.

Die zwischen 2 Lichtsignalen verstreichenden *Eigenzeiten* sind in der Entfernung r und r' voneinander verschieden, und zwar ist ihr Verhältnis:

$$\frac{t}{t'} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\alpha}{r}}{1 - \frac{\alpha}{r'}}}.$$

Das gibt zu einem *Dopplereffekt* Veranlassung von der Größe:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\alpha}{2r},$$

wenn $r' = \infty$ gesetzt werden kann. (*Rotverschiebung der Spektrallinien.*) Für einen vom Sonnenrand kommenden Lichtstrahl beträgt der Effekt: $2 \cdot 10^{-6}$.

Literatur.

W. Pauli jr.: Relativitätstheorie (Leipzig: B. G. Teubner), H. Weyl: Raum, Zeit, Materie (Berlin: J. Springer), M. v. Laue: Relativitätstheorie (Braunschweig: Vieweg).

Vierzehnter Abschnitt. Thermodynamik.

A. Grundbegriffe.

Die Thermodynamik beschäftigt sich mit Systemen räumlich nebeneinander befindlicher homogener Körper.

Homogen heißt dabei ein Körper, wenn seine räumlichen Bestandteile gleich sind bezüglich ihrer makroskopischen Bestimmungsstücke, wie chemische Zusammensetzung, Dichte, Elastizität usw.

Die Erfahrung zeigt, daß bei gegebener chemischer Zusammensetzung der *Zustand* jedes homogenen Körpers (d. h. die Gesamtheit der übrigen genannten Bestimmungsstücke) festgelegt ist durch den äußeren (allseitigen) *Druck* p , unter dem der Körper (und daher jeder seiner Raumteile) steht und durch seine Dichte d bzw. sein *spezifisches Volumen* $v = \frac{1}{d} = \frac{V}{M}$ (V = Volumen, M = Masse des Körpers). p und v heißen *Zustandsvariablen*.

Eine Wand (Trennungsfläche zwischen zwei Körpern) heißt *wärmeundurchlässig* oder *adiabatisch*, wenn ein von ihr umhüllter homogener Körper seinen Zustand p , v bei Anschluß äußerer Fernkräfte nur dann ändert, wenn die Wand bewegt wird. Jede andere Wand heißt *diatherman* oder *wärmedurchlässig*.

Die Erfahrung zeigt, daß ein adiabatisch begrenztes System, dessen homogene Einzelsysteme diatherman einander berühren, nur dann im *Gleichgewicht* ist, d. h. seinen Zustand bewahrt, wenn die Zustandsvariablen p_i , v_i der Einzelsysteme zusammenhängen durch Relationen:

$$(1) \quad f_1(p_1, v_1) = f_2(p_2, v_2) = \dots, f_i(p_i, v_i) = F(\vartheta),$$

wo die Form der Funktionen f_i nur durch die chemische Zusammensetzung bestimmt ist. Die Funktion F kann dabei willkürlich angenommen werden.

Wir können daher auch ϑ als *Zustandsvariable* benutzen. ϑ heißt empirische *Temperatur* (in zunächst willkürlicher Skala).

B. Hauptsätze.

1. *Hauptsatz*: Um ein adiabatisch abgeschlossenes, d. h. von adiabatischen Wänden umschlossenes System von einem Gleichgewichtszustand (1) zu einem anderen (2) zu bringen, ist immer dieselbe Arbeit A erforderlich, unabhängig von der Form des Übergangs.

$$(2) \quad A = U_{(2)} - U_{(1)}.$$

U ist eine Funktion der Zustandsvariablen und heißt die *Energie* des Systems. Sie ist nur bis auf eine additive Konstante bestimmt.

Für ein nicht adiabatisch abgeschlossenes System gilt die Gleichung im allgemeinen nicht.

$$(3) \quad Q = U_{(2)} - U_{(1)} - A$$

heißt dann die dem System zugeführte *Wärmemenge*.

Quasistatisch heißt eine Zustandsänderung, bei der das System sich immer nur um verschwindende Größen vom Gleichgewicht entfernt.

Für solche gilt (im Fall rein mechanischer Arbeitsleistung):

$$dA = -p dV,$$

mithin

$$(4) \quad dQ = dU + p dV,$$

im Falle des adiabatischen Systems also

$$(5) \quad dQ = dU + p dV = 0.$$

Ebenso gilt für jeden homogenen Bestandteil:

$$(\quad) \quad dQ_i = dU_i + p_i dV_i,$$

und es ist

$$(\quad) \quad dU = \sum_i dU_i; \quad dQ = \sum_i dQ_i.$$

Sei λ_i eine Funktion der Zustandsvariablen des Teils i , welche als integrierender Nenner die Größe $d\varphi_i = \frac{dQ_i}{\lambda_i}$ zu einem vollständigen Differential macht. Dann ist auch φ_i als Zustandsvariable benutzbar.

Ein solcher integrierender Nenner existiert sicher, da dQ_i nur von zwei Variablen abhängt.

Es ist dann für ein adiabatisch abgeschlossenes System

$$(5') \quad dQ = \sum \left(\frac{\partial U_i}{\partial \varphi_i} + p_i \frac{\partial V_i}{\partial \varphi_i} \right) d\varphi_i + \left(\frac{\partial U}{\partial \vartheta} + p \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \right) d\vartheta = 0.$$

Diese (*Pfaffsche*) Gleichung mit mehr als zwei unabhängigen Variablen hat einen integrierenden Nenner λ (vgl. S. 124) wegen des

2. *Hauptsatzes* (in der Form von *Carathéodory*):¹⁾ In beliebiger Nähe jedes Zustands eines adiabatischen abgeschlossenen Systems gibt es Nachbarzustände, die von ihm aus (etwa durch äußere Arbeit) nicht erreichbar sind.

$$(6) \quad d\varphi = \frac{dQ}{\lambda} \text{ sei also ein totales Differential.}$$

Dann gilt wegen $d\varphi_i = \frac{dQ_i}{\lambda_i}$ auch

$$\lambda d\varphi = \sum_i \lambda_i d\varphi_i,$$

also bei $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ und ϑ als Zustandsvariablen:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \varphi_i} = \frac{\lambda_i}{\lambda}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} = 0.$$

φ ist also Funktion der φ_i allein:

$$\varphi = \varphi(\varphi_1, \varphi_2, \dots),$$

während λ außerdem von ϑ abhängen kann:

$$\lambda = \lambda(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \vartheta).$$

Dann ist auch

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda} \right) = 0,$$

also

$$(7) \quad \lambda_i = G(\vartheta) \cdot \Phi_i(\varphi_i)$$

und

$$(7') \quad \lambda = G(\vartheta) \cdot \Phi(\varphi_1, \varphi_2, \dots).$$

wo $G(\vartheta)$ eine für *alle* Teile und das ganze System identische Funktion von ϑ ist.

Wegen

$$d\varphi = \sum \frac{\lambda_i d\varphi_i}{\lambda} = \sum \frac{\Phi_i}{\Phi} d\varphi_i \quad \text{folgt} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_k} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_i} \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi_k} = 0,$$

ist Φ eine Funktion von $\varphi(\varphi_1, \varphi_2, \dots)$ d. h. $\lambda = G(\vartheta) \Phi(\varphi)$.

Da auch $\frac{\lambda_i}{\Phi_i(\varphi_i)}$ bzw. $\frac{\lambda}{\Phi(\varphi)}$ integrierende Nenner der Differentiale dQ_i bzw. dQ sind, wenn λ_i bzw. λ es sind, so ist auch

$$G(\vartheta) = e^{\int \frac{\partial \ln \lambda_i}{\partial \vartheta} \Big|_{\varphi_i} d\vartheta} = e^{\int \frac{\partial \ln \lambda}{\partial \vartheta} \Big|_{\varphi} d\vartheta}$$

ein solcher für dieselben. Wir nennen

$$(8) \quad T = C(G(\vartheta))$$

die *thermodynamische Temperatur*, wo C ein Maßstabfaktor ist.

¹⁾ Mathem. Ann. 61. 355. 1909; vgl. auch M. Born. Phys. 2. 22. 218. 1921.

Dann ist

$$(9) \quad dQ_i = \lambda_i d\varphi_i = \frac{T}{C} \Phi_i d\varphi_i = T dS_i,$$

$$S_i = \frac{1}{C} \int \Phi_i d\varphi_i$$

heißt die *Entropie* des Teils i .

$$(9') \quad dQ = \frac{T}{C} \Phi(\varphi) d\varphi = T dS,$$

$$S = \frac{1}{C} \int \Phi(\varphi) d\varphi$$

heißt die *Gesamtentropie* des Systems.

Wegen $dQ = \sum_i dQ_i$ folgt

$$(10) \quad dS = \sum_i dS_i.$$

Wegen der Additivität von $dU = \sum_i dU_i$ (7) und $dS = \sum_i dS_i$ (10) können wir auch die Differentiale der *spezifischen Energie* bzw. *Entropie* einführen du bzw. ds und erhalten:

$$(11) \quad du = T ds - p dv.$$

C. Zustandsvariabeln.

Als Parameter zur thermodynamischen Charakterisierung *des Zustandes* eines homogenen Stoffes kann man also zwei beliebige der Größen p, v, T, s verwenden, sowie der aus diesen abgeleiteten Größen u, f, ψ, χ , welche definiert sind durch

$$(1) \quad \begin{aligned} du &= T ds - p dv, \\ df &= -s dT - p dv, \\ d\psi &= -s dT + v dp, \\ d\chi &= T ds + v dp, \end{aligned}$$

und durch eine *Legendresche Transformation* auseinander hervorgehen, indem man setzt:

$$(2) \quad \begin{aligned} f &= u - Ts, \\ \psi &= f + pv = u - Ts + pv, \\ \chi &= u + pv. \end{aligned}$$

f heißt spezifische freie Energie,
 ψ „ thermodynamisches Potential,
 χ „ Wärmefunktion.

Das Gesamtvolumen, Gesamtentropie usw. findet man aus den spezifischen durch Multiplikation mit der Masse M des Körpers

$$V = Mv, \quad S = Ms \text{ usw.}$$

Die Masse M eines aus N Molekülen vom Molekulargewicht m bestehenden Körpers ist

$$M = N \cdot m \cdot \frac{h}{R}$$

wo $h = 1,37 \cdot 10^{-16}$, d. h. gleich der *Boltzmannschen* Konstanten und $R = 8,315 \cdot 10^7$, d. h. gleich der Gaskonstanten ist (vgl. S. 250).

$n = \frac{N h}{R}$ heißt die Anzahl der „Mole“ des Körpers

also ist $M = n m$.

Die Kombination mehrerer Körper, deren Zustand durch die Variablen p, v, T, s definiert ist, heißt ein *inhomogenes System*.

Für den Zustand des Systems sind folgende Größen von Bedeutung:

$$M = \sum_i M_i = \text{Masse}$$

$$V = \sum_i M_i v_i = \text{Volumen}$$

$$S = \sum_i M_i s_i = \text{Entropie}$$

$$U = \sum_i M_i u_i = \text{Energie}$$

$$F = \sum_i M_i f_i = \text{freie Energie}$$

$$\Psi = \sum_i M_i \psi_i = \text{thermodyn. Potential}$$

$$X = \sum_i M_i \chi_i = \text{Wärmefunktion.}$$

D. Koeffizienten.

Folgende partielle Differential-Quotienten haben besondere Bedeutung und Namen:

$$c_v = \left(\frac{\partial q}{\partial T} \right)_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v \quad \text{spezifische Wärme bei konstantem Volumen,}$$

$$c_p = \left(\frac{\partial q}{\partial T} \right)_p = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_p + p \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \quad \text{spez. Wärme bei konstantem Druck,}$$

$$\alpha = \frac{1}{v_0} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \quad \text{Ausdehnungskoeffizient,}$$

$$\sigma = \frac{1}{p_0} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v \quad \text{Spannungskoeffizient,}$$

$$\varepsilon = -v_0 \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_T \quad \text{Elastizitätskoeffizient} \left(\frac{1}{\varepsilon} = \text{Kompressionskoeffizient} \right).$$

Beziehungen zwischen diesen sind u. a. $\frac{p_0 \cdot \sigma}{\varepsilon \alpha} = 1$,

$$c_p - c_v = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p = T p_0 \cdot \sigma v_0 \alpha$$

$$= -T \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_T \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p^2 = T \cdot \varepsilon \cdot \alpha^2 v_0$$

Ferner gelten folgende Beziehungen:

$$s(p, T) = s_{0p} + \int_0^T \frac{c_p}{T} dT, \quad u(p, T) = u_{0p} + \int_0^T c_p dT - p \int_0^T \left. \frac{\partial v}{\partial T} \right|_p dT,$$

$$s(v, T) = s_{0v} + \int_0^T \frac{c_v}{T} dT, \quad u(v, T) = u_{0v} + \int_0^T c_v dT.$$

E. Spezialfälle.

1. Ideale Gase.

Bei den sogenannten *idealen Gasen* sind zwei Zustände p_1, v_1 und p_2, v_2 im thermischen Gleichgewicht, wenn $p_1 \cdot v_1 = p_2 \cdot v_2$ ist. Also kann nach (A 1) durch $p \cdot v = \vartheta$ eine spezielle Temperaturskala ϑ eingeführt werden. Bei den idealen Gasen ist ferner u nur von $p \cdot v$ abhängig, also $u = u(\vartheta)$. Daher wird

$$dq = du + p dv = \vartheta \left[\frac{u'}{\vartheta} d\vartheta + d \ln v \right] = \vartheta \cdot d \ln (\vartheta \cdot v),$$

falls

$$\ln \vartheta = \int \frac{u'}{\vartheta} \cdot d\vartheta$$

gesetzt wird.

also $dq = \lambda d\varphi$ mit $\lambda = \vartheta = pv$, $\varphi = \lg(\vartheta \cdot v)$

Nach (B 7') wird dann

$$T = C \cdot G(\vartheta) = C \int \frac{\partial \ln \lambda}{\partial \vartheta} d\vartheta = C\vartheta = Cpv$$

die thermodynamische Temperatur. Sie ist also bei einem idealen Gas (bis auf eine Maßstabkonstante) identisch mit der „Gastemperatur“.

Für *ideale Gase* machen wir folgenden durch die Erfahrung gebotenen Ansatz:

$$pv = rT,$$

$$u = u_0 + apv = u_0 + arT,$$

Dann wird:

$$dq = T ds = du + p dv = (a+1)p dv + av dp,$$

$$= ar dT + \frac{arT}{v} dv = (a+1)r dT - \frac{rT}{p} dp$$

also:

$$s = s_0 + ar \ln \left(v \frac{a+1}{a} p \right);$$

und die „spezifische Wärme“ bei konstantem Druck:

$$\left. \frac{\partial q}{\partial T} \right|_p = (a+1)r = c_p,$$

bei konstantem Volumen:

$$\left. \frac{\partial q}{\partial T} \right|_v = a r = c_v,$$

und hieraus:

$$c_p - c_v = r; \quad \frac{c_p}{c_v} = \frac{a+1}{a} = \gamma; \quad a = \frac{1}{\gamma-1}.$$

Aus $p \cdot v = rT$ folgt:

$$\frac{1}{v_0} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p = \alpha = \frac{1}{v_0} \frac{r}{p} = \text{Ausdehnungskoeffizient},$$

$$\frac{1}{p_0} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v = \sigma = \frac{1}{p_0} \frac{r}{v} = \text{Spannungskoeffizient},$$

$$-v_0 \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_T = s = p = \text{Elastizitätskoeffizient}.$$

Die Erfahrung (sowie die kinetische Theorie der Gase) ergibt, daß $R = r m$, wo m das *Molekulargewicht* des Gases bedeutet, eine *universelle Konstante* ist, die „*Gaskonstante*“

$$R = 1,98 \frac{\text{cal}}{\text{mol}} = 8,315 \cdot 10^7 \frac{\text{erg}}{\text{mol}}.$$

Für einatomige Gase ergibt die Gastheorie $a = \frac{8}{3}$; $\gamma = \frac{5}{3}$,
für zweiatomige Gase ergibt die Gastheorie $a = \frac{5}{2}$; $\gamma = \frac{7}{5}$,
für drei- und mehratomige Gase ergibt die Gastheorie $a = 3$; $\gamma = \frac{4}{3}$.

Also wird hier

$$pv = \frac{RT}{m}; \quad s = s_0 + \frac{aR}{m} \ln(v^r p),$$

$$u = u_0 + \frac{aR}{m} T, \quad c_p = \frac{a\gamma \cdot R}{m}; \quad c_v = \frac{aR}{m},$$

oder: $s = \text{Const} + c_v \ln T + \frac{R}{m} \ln \frac{T}{p}.$

$$= \text{Const} + c_p \ln T - \frac{R}{m} \ln p$$

$$u = u_0 + c_v T,$$

$$f = (u_0 - T s_0) + c_v T (1 - \ln(v^r p)),$$

$$\psi = (u_0 - T s_0) + T(c_p - c_v \ln(v^r p)),$$

$$\chi = u_0 + c_p T.$$

2. Gemische idealer Gase.

Für einen Körper vom Volumen V , der Temperatur T und dem Druck p , der aus verschiedenen Molekülen m_i mit den Molzahlen n_i besteht, gelten einfache Verhältnisse nur falls sich die Moleküle nicht gegenseitig beeinflussen, z. B. bei Gemischen idealer Gase.

Wir führen die Größen ein, die für jede Molekulart gelten würden, wenn diese allein anwesend wäre,

$$\bar{p}_i = \frac{RT M_i}{m_i V} = \frac{RT}{V} n_i \quad (\text{Partialdruck})$$

$$\bar{U}_i = M_i (u_{oi} + c_{vi} T) = n_i m_i (u_{oi} + c_{vi} T)$$

$$\bar{S}_i = n_i \left(m_i c_{vi} \ln T + R \ln \frac{T}{p_i} + h_i \right).$$

Dann gilt

$$p = \sum_i \bar{p}_i = \frac{RT}{V} \sum_i n_i \quad (\text{Daltonsches Gesetz})$$

$$U = \sum_i \bar{U}_i$$

$$S = \sum_i \bar{S}_i \quad (\text{Gibbssches Paradoxon}).$$

Daraus folgt

$$\bar{p}_i = \frac{p \cdot n_i}{\sum n} = p c_i$$

$$c_i = \frac{n_i}{\sum n} \text{ heißt molare Konzentration.}$$

Entropiezunahme bei Mischung.

Zwei ideale Gase mit den Molzahlen n_1 und n_2 , beide mit gleichem p und T nebeneinander liegend, haben insgesamt die Entropie

$$S = n_1 \left(c_{v1} m_1 \ln T + R \ln \frac{T}{p} + h_1 \right) + n_2 \left(c_{v2} m_2 \ln T + R \ln \frac{T}{p} + h_2 \right)$$

Tritt nach Wegnahme ihrer Scheidewand eine Diffusion ein, welche zu den Partialdrucken

$$p_1 = c_1 p, \quad p_2 = c_2 p \quad \left(c_1 = \frac{n_1}{n_1 + n_2}, \quad c_2 = \frac{n_2}{n_1 + n_2} \text{ Konzentrationen} \right)$$

führt, so wird die Entropie nach Beendigung der Diffusion:

$$S = n_1 \left(c_{v1} m_1 \ln T + R \ln \frac{T}{p_1} + h_1 \right) + n_2 \left(c_{v2} m_2 \ln T + R \ln \frac{T}{p_2} + h_2 \right)$$

Die Entropieänderung beträgt also

$$\begin{aligned} & - n_1 R \ln \frac{p_1}{p} - n_2 R \ln \frac{p_2}{p} = \\ & - n_1 R \ln c_1 - n_2 R \ln c_2 \quad (\text{positiv}). \end{aligned}$$

3. Hohlraumstrahlung.

Für einen mit Strahlung erfüllten Hohlraum vom Volumen V gilt, wenn man $U = uV$ setzt und $S = sV$, wo u die Energie und s die Entropie pro Volumeinheit bedeutet:

$$dS = \frac{dU + p dV}{T}.$$

Da hier nach der *Maxwellschen* Theorie $u = 3p$ wird, so ist

$$dS = d(sV) = s dV + V ds = \frac{3V dp + 4p dV}{T},$$

also

$$ds = \frac{3 dp}{T}; \quad s = \frac{4p}{T},$$

und daher

$$T = \text{const} \cdot p^{\frac{1}{4}}.$$

$$U = 3pV = \alpha T^4 V$$

(*Stephan-Boltzmannsches* Gesetz).

$$\left(\alpha = 7,18 \cdot 10^{-16} \frac{\text{erg}}{\text{cm}^2 \text{ grad}^4} \right),$$

$$S = \frac{4}{3} \alpha T^3 V; \quad F = -\frac{1}{3} \alpha T^4 V; \quad \Psi = 0; \quad X = \frac{4}{3} \alpha T^4 V.$$

F. Prozesse.

Die Änderung der Zustandsvariablen eines Systems heißt ein *Prozeß*.
Man unterscheidet:

- $T = \text{const}$: isothermer Prozeß,
- $S = \text{const}$: adiabatischer Prozeß,
- $V = \text{const}$: isochorer (isopykner) Prozeß,
- $p = \text{const}$: isobarer (isopiestic) Prozeß.

Die physikalische Realisierung dieser Bedingungen kann z. B. erfolgen:

1. $T = \text{const}$ durch den Kontakt mit einem großen Wärmereservoir,
2. $s = \text{const}$ durch eine wärmeundurchlässige Umhüllung,
3. $v = \text{const}$ durch eine starre Umhüllung,
4. $p = \text{const}$ durch die Wirkung eines mit Gewicht belasteten Kolbens.

1. und 2. sind daher nicht vereinbar, ebensowenig 3. und 4.

Kreisprozeß heißt ein Prozeß, der nach beliebiger Änderung der Variablen zum Ausgangszustand zurückführt. Da weder da noch dq totale Differentiale sind, wird $\Delta a = \oint da$ sowie $\Delta q = \oint dq$ je einen bestimmten von 0 verschiedenen Wert haben. Andererseits ist $\Delta u = \oint du = 0$, also $\Delta a = \Delta q$. Durch den Kreisprozeß ist Wärme in Arbeit (oder umgekehrt) „umgewandelt“ worden.

Wichtig ist folgender mit einem beliebigen System z. B. einem idealen Gase durchgeführter Kreisprozeß (*Carnotprozeß*) zwischen zwei Wärmereservoirien R_1 und R_2 mit den Temperaturen T_1 und T_2 ($T_1 > T_2$):

1. adiabatische Expansion von T_1 zu T_2 ,
2. isotherme Kompression bei T_2 (Kontakt mit R_2),
3. adiabatische Kompression von T_2 zu T_1 ,
4. isotherme Expansion bei T_1 zum ursprünglichen Volumen.

Da

$$\phi dS = \frac{\Delta Q_1}{T_1} + \frac{\Delta Q_2}{T_2} = 0.$$

ist, wird hierbei eine Arbeit ΔA gewonnen:

$$\Delta A = \Delta Q_1 + \Delta Q_2 = \frac{\Delta Q_1 (T_1 - T_2)}{T_1} = \frac{\Delta Q_2 (T_2 - T_1)}{T_2}.$$

wo ΔQ_1 bzw. ΔQ_2 die den Reservoiren entnommenen Wärmemengen sind.

G. Zustandsgleichung.

Für einen homogenen Stoff bestimmen zwei der Variablen p, v, T die dritte. Dieser Zusammenhang wird durch die *Zustandsgleichung* des Stoffes festgelegt: $p = p(v, T)$; $v = v(p, T)$ usw.

Kritischer Punkt heißt der Zustand, in dem

$$\left. \frac{\partial p}{\partial v} \right|_T = 0 \quad \text{und} \quad \left. \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} \right|_T = 0$$

ist. Die dort geltenden Variablen p_1, T_1, v_1 heißen *kritischer Druck*, *kritische Temperatur* und *kritisches Volumen*.

Führt man als neue Variablen die Größen

$$\nu = \frac{v}{v_1}; \quad \pi = \frac{p}{p_1}; \quad \tau = \frac{T}{T_1}$$

ein, so heißen diese *reduzierte Zustandsdaten*. Die *reduzierte Zustandsgleichung* $\pi = \pi(\nu, \tau)$ ist für die meisten Substanzen nahezu gleich. (Das ist streng nur möglich, wenn die Zustandsgleichung nur drei für den Stoff charakteristische Konstanten enthält.)

Für hinreichend hohe Temperaturen nähert sich die Zustandsgleichung aller Stoffe der der idealen Gase $p v = \frac{RT}{m}$ (m = Molekulargewicht, R = Gaskonstante). Nach *van der Waals* läßt sich durch die Gleichung

$$\left(p + \frac{a}{v^2} \right) (v - b) = \frac{RT}{m}$$

die Zustandsgleichung aller Stoffe für größere Bereiche angenähert darstellen.

Gilt diese Gleichung streng, so wird:

$$v_1 = 3b; \quad p_1 = \frac{a}{27b^2}; \quad T_1 = \frac{8}{27} \frac{a}{b} \cdot \frac{m}{R}$$

$$\text{also:} \quad a = 3\pi\nu^2; \quad b = \frac{\nu}{3}; \quad m = \frac{3}{8} \frac{R\tau}{\pi\nu}.$$

Die reduzierte Zustandsgleichung lautet dann:

$$\left(\pi + \frac{3}{\nu^2} \right) (3\nu - 1) = 8\tau$$

Boylepunkt heißt die Temperatur T_B , bei der $\left. \frac{\partial(pv)}{\partial p} \right|_T = 0$ ist.

Inversionspunkt heißt die Temperatur T_y , bei der $T \frac{\partial v}{\partial T} \Big|_p - v = 0$ ist. Es ist angenähert $T_y = 2T_B = \frac{2am}{Rb}$. Ist T größer als T_y , so liefert eine Expansion ohne Arbeitsleistung eine Erwärmung, ist T kleiner als T_y , eine Abkühlung.

H. Vollständige Systeme.

Ein System heißt *vollständig* oder *abgeschlossen*, wenn sein Zustand unabhängig ist von den Vorgängen außerhalb von ihm¹⁾.

Die Abgeschlossenheit eines Systems wird nicht berührt durch die Möglichkeit von äußeren Eingriffen, welche keine Veränderungen außerhalb hinterlassen, also speziell keine Energie erfordern, wie z. B. Betätigung von Sperrungen, Öffnen und Schließen von Ventilen oder Kontakten u. dgl. Ohne solche Eingriffe wäre ja jede Beeinflussung eines abgeschlossenen Systems unmöglich.

Ein Prozeß (eines vollständigen Systems) heißt *reversibel*, wenn er von außen rückgängig gemacht werden kann (ohne außerhalb Veränderungen zu hinterlassen), andernfalls *irreversibel*.

Bei einem reversiblen Prozeß bleibt $S = \sum_i M_i s_i$ konstant. Bei einem irreversiblen wächst S (2. Hauptsatz).

Hat S den Maximalwert, der für das System durch Änderung der Variablen der Bestandteile (bei konstanter Gesamtenergie) erreichbar ist, so ist kein irreversibler Prozeß mehr möglich. Da reversible Prozesse in der Natur nie vollständig realisierbar sind, ist das System dann im *Gleichgewicht*.

Die allgemeinste Gleichgewichtsbedingung für abgeschlossene Systeme lautet also $\delta S = 0$ ($S = \text{Maximum}$).

Eine wichtige Methode, in einem abgeschlossenen System einen Prozeß reversibel zu führen, besteht darin, daß man zwischen zweien seiner Bestandteile eine Maschine einschaltet, in der man einen Carnotschen Kreisprozeß durchführt. Dann ist

$$(1) \quad \frac{dQ_1}{T_1} + \frac{dQ_2}{T_2} = dS_1 + dS_0 = dS = 0.$$

(Die Maschine kann dabei beliebig klein angenommen werden, so daß sie gegen das übrige System verschwindet. Da in ihr definitiv keine Veränderung vor sich geht, kann sie auch als außerhalb des Systems betrachtet werden.) Die hierbei gewonnene Arbeit soll dann in irgend-einer Weise etwa durch Kompressionsarbeit oder über einen zweiten Carnotstrom dem übrigen System wieder zugeführt werden.

¹⁾ Es sind also für ein solches V (und natürlich auch M) unveränderliche Größen. U ist gleichfalls eine Konstante (1. Hauptsatz).

Eine einfache Betrachtung zeigt, daß jede Vorrichtung, die reversibel Wärme in Arbeit umwandelt (oder umgekehrt) dieselbe Beziehung zwischen dQ_1 , dQ_2 und dA liefert wie die Carnotmaschine. Alle derartigen Prozesse, die reversibel verlaufen, sind daher durch die fiktive Einschaltung einer Carnotmaschine der Berechnung zugänglich.

Wichtige Vorgänge, die zu *Irreversibilität* Anlaß geben sind:

1. Ausdehnung eines Gases ohne äußere Arbeit

$$\Delta S = \frac{R}{M} \frac{\Delta v}{v}$$

(für kleines Δv und ideales Gas).

2. Diffusion von Gasen, Salzen u. dgl.

$$\Delta S = \Delta M \cdot \frac{R}{M} \frac{\Delta p}{p}.$$

3. Wärmeleitung

$$\Delta S = \Delta Q \cdot \frac{\Delta T}{T^2}.$$

4. Reibungsarbeit

$$\Delta S = \frac{\Delta A}{T}.$$

Ein *nicht abgeschlossenes* System kann durch Hinzufügen der Umgebung zu einem abgeschlossenen gemacht werden. Werden die Zustandsvariablen der Umgebung durch einen Index bezeichnet, so ist bei einem Prozeß $dS + dS' \geq 0$. Wir nehmen an, daß in der Umgebung keine Vorgänge geschehen, die zu Irreversibilität führen (s. o.). Dann ist

$$dS' = \frac{dQ'}{T'}; \quad dQ = -dQ$$

also

$$dS - \frac{dQ}{T'} \geq 0$$

(2)

$$dS - \frac{dU - dA}{T'} \geq 0,$$

anders geschrieben

(2')

$$dU - T' dS \leq dA.$$

Spezialfälle:

1. $dQ' = 0$ (adiabatischer Vorgang)

liefert $dU = dA$; $dS \geq 0$.

2. $T = \text{const}$ (isothermer Vorgang)

liefert $dF = d(U - TS) \leq dA$ (freie Energie)¹⁾.

¹⁾ dF stellt also den Minimalbetrag der aufzuwendenden bzw. den Maximalbetrag der zu gewinnenden Arbeit dar, wenn das System einen isothermen Prozeß durchmacht. Hierauf beruht die Bedeutung von F

$$\Delta A = \Delta F = \Delta(U - TS) = \Delta U - T \cdot \frac{\partial \Delta F}{\partial T} = \Delta U - T \cdot \frac{\partial \Delta A}{\partial T}$$

angewandt auf reversible, isotherme Prozesse heißt „Helmholtzsche Gleichung“.

3. T und $p = \text{const}$

liefert $dA = -p dV$

$d\Psi = d(U - TS + pV) \geq 0$ (thermodynamisches Potential).

Gleichgewichte für unvollständige Systeme (in Verbindung mit der Umgebung) bestehen, wenn $\delta S + \delta S' = 0$ ist, also

für adiabatisch abgeschlossene Systeme, wenn $\delta S = 0$ (max)

für isotherm gehaltene Systeme, wenn $\delta F = 0$ (min)

für isotherm und isobare Systeme, wenn $\delta \Psi = 0$ (min)

ferner wenn S und V konstant bleiben $\delta U = 0$ (min)

wenn S und p konstant bleiben $\delta X = 0$ (min).

J. Spezielle Gleichgewichte.

Spezialfälle für *vollständige* Systeme ($\delta U = 0$; $\delta V = 0$; $\delta S = 0$; $\delta M = 0$).

1. Die M_i seien konstant, realisierbar durch Umhüllung jedes Bestandteils mit einer wärmedurchlässigen, nicht starren Hülle.

Es folgt

$$T_1 = T_2 = T_3 = \dots = T_i$$

$$p_1 = p_2 = p_3 = \dots = p_i$$

Hierauf beruht die Möglichkeit, mit Probekörpern (*Thermometer* und *Manometer*) Temperatur und Druck beliebiger Stoffe zu messen.

2. Die M_i und v_i seien konstant; wärmedurchlässige starre Umhüllungen.

Es folgt

$$T_1 = T_2 = T_3 = \dots = T_i$$

3. Die s_i und M_i seien konstant, realisierbar durch Umhüllung jedes Bestandteils durch eine wärmeundurchlässige, nicht starre Hülle.

Es folgt

$$p_1 = p_2 = \dots = p_i$$

4. Die M_i seien nicht konstant, sondern nur M . Die einzelnen Körper (Phasen) können in ihrer Menge sich ändern (Verdampfung usw).

Es folgt

$$T_1 = T_2 = \dots = T_i$$

$$p_1 = p_2 = \dots = p_i$$

$$\psi_1 = \psi_2 = \dots = \psi_i$$

p und T bestimmen sich hier gegenseitig eindeutig, solange mehrere nichtidentische Bestandteile existieren.

Da S ein Maximum sein muß, muß

$$(1) \quad \delta^2 S = - \sum_i \left(M_i c_{v_i} \delta T_i^2 + \left(\frac{\partial p_i}{\partial v_i} \right)_T \delta v_i^2 \right) < 0.$$

Besteht das System nur aus zwei Bestandteilen 1 und 2 und geht man von einem Gleichgewichtszustand zu einem andern über, bei dem T zu $T + dt$, p zu $p + dp$ wird, so ist

$$d\psi_1 - d\psi_2 = 0 = -(s_1 - s_2) dt + (v_1 - v_2) dp,$$

also

$$(2) \quad s_1 - s_2 = (v_1 - v_2) \frac{dp}{dT}.$$

Bei einer Umwandlung unter konstantem Druck und Temperatur aus einem Gleichgewicht in einen andern (Verdampfung usw.) ist eine Wärmezufuhr $\Delta Q = T \Delta S$ erforderlich. Wird hierbei die Menge M aus dem Zustand s_1, v_1, p, T in den Zustand s_2, v_2, p, T umgewandelt, so ist

$$\Delta Q = T \cdot M (s_1 - s_2).$$

$\frac{\Delta Q}{M} = r$ heißt *Umwandlungswärme*. Es folgt

$$(3) \quad r = T(s_1 - s_2) = (v_1 - v_2) T \frac{dp}{dT} \text{ (Clausius-Clapeyronsche Gleichung)}^1).$$

K. Phasentheorie.

Es seien α verschiedene Bestandteile („Komponenten“) in den voneinander unabhängigen Mengen M_i gegeben, die sich zu Verbindungen^{a)} vereinigen können. Von diesen sollen eine Anzahl β gleichzeitig nebeneinander existieren (Phasen), deren Mengen M^k seien.

In der k -ten Phase sei die Menge M_i^k des i -ten Stoffes enthalten.

Es ist also

$$M_i = \sum_k M_i^k; \quad M^k = \sum_i M_i^k. \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, \alpha \\ k = 1, 2, \dots, \beta \end{matrix}$$

Der Gleichgewichtszustand ist abhängig von den Variablen p und T , sowie den Zusammensetzungen der Phasen, etwa dargestellt durch

die Gehalte $c_i^k = \frac{M_i^k}{M^k}$ ($\alpha \cdot \beta$ Größen), zwischen denen die Relationen $\sum_i c_i^k = 1$ (β Gleichungen) bestehen. Er ist nicht abhängig von der Menge einer Phase.

Wenn p und T gegeben sind, lautet die Gleichgewichtsbedingung $\delta\Psi = 0$.

¹⁾ Falls $v_1 = 0$ gesetzt werden kann (Flüssigkeit)

und $v_2 = \frac{RT}{pm}$ gesetzt werden kann (Dampf)

gilt $r = -\frac{RT^2}{m} \frac{d \ln p}{dT}$.

^{a)} Jede Verbindung hat ihre eigene Zustandsgleichung.

Setzt man $\Psi = \sum_k \Psi^k$, dann ist Ψ^k eine homogene Funktion 1. Grades der M_i^k , denn bei Vermehrung aller M_i^k einer Phase um den gleichen Faktor wächst Ψ^k auch um diesen Faktor¹⁾. Es ist also nach dem Eulerschen Satz:

$$(1) \quad \Psi^k = \sum_i \frac{\partial \Psi^k}{\partial M_i^k} M_i^k;$$

worin $\frac{\partial \Psi^k}{\partial M_i^k}$ nicht von den M_i^k , sondern außer von p und T nur von den c_i^k abhängt. Daraus folgt

$$(2) \quad \delta \Psi = \sum_k \delta \Psi^k = \sum_k \sum_i \frac{\partial \Psi^k}{\partial M_i^k} \delta M_i^k = 0.$$

Dazu treten die Nebenbedingungen $\delta M_i = \delta \sum_k M_i^k = 0$.

Daraus folgen die Gleichungen

$$(3) \quad \frac{\partial \Psi^1}{\partial M_i^1} = \frac{\partial \Psi^2}{\partial M_i^2} = \dots \quad (\alpha(\beta - 1) \text{ Gleichungen!})$$

Im ganzen hat man also $\beta + \alpha(\beta - 1)$ Gleichungen für die $\alpha \cdot \beta + 2$ Größen c_i^k, p, T .

Damit eine Lösung möglich ist, muß $\beta + \alpha(\beta - 1) \leq \alpha\beta + 2$ sein, d. h. $\beta \leq \alpha + 2$ (*Phasenregel von Gibbs*).

L. Massenwirkungsgesetz.

Ein Gemisch idealer Gasmoleküle, welche ineinander umgewandelt werden können (Beispiel H_2, I_2, HI) und mit den Molzahlen n_i , also den (molaren) Konzentrationen

$$c_i = \frac{n_i}{n_1 + n_2 + \dots}, \quad \sum c_i = 1$$

vertreten sind, möge bei der Temperatur T und dem Druck p im Gleichgewicht sein.

Bei Variation der n_i , aber konstantem p und T unter Berücksichtigung von $\sum c_i = 1$ ist die Gleichgewichtsbedingung

$$\delta \Psi = 0, \quad \sum \delta c_i = 0, \\ \sum (\varphi_i - R \ln c_i) \delta n_i = 0,$$

wenn wir unter φ_i den Ausdruck:

$$\varphi_i = \frac{m_i u_i}{T} - m_i c_i \ln T - R \cdot \ln \frac{T}{p} + R$$

verstehen, oder anders geschrieben

$$(1) \quad c_1^{\delta n_1} \cdot c_2^{\delta n_2} \cdot \dots = e^{(\varphi_1 \delta n_1 + \varphi_2 \delta n_2 + \dots) : R}$$

¹⁾ Weil keine Veränderungen im übrigen System eintreten, da das Gleichgewicht nicht geändert wird.

Darin hängt die rechte Seite nur von p und T ab. Setzt man also $\delta n_i = \nu_i \cdot z$, wo z irgendein Faktor zur Reduktion der Zahlen δn_i auf möglichst kleine ganze Zahlen ν_i ist, so wird

$$(2) \quad c_1^{\nu_1} \cdot c_2^{\nu_2} \dots = K(T, p) \quad (\text{Massenwirkungsgesetz}).$$

Beispiel. Dissoziation von Jodwasserstoff.

Drei Molekülarten $n_1 HI$, $n_2 H_2$, $n_3 I_2$.

Je zwei Moleküle HI gehen in ein Molekül H_2 und ein I_2 über, also $\nu_1 = -2$, $\nu_2 = 1$, $\nu_3 = 1$

$$\frac{c_2 c_3}{c_1^2} = \frac{n_2 n_3}{n_1^2} = K(T, p).$$

Falls die Gesamtzahl der idealen Gasmoleküle unverändert bleibt ($\nu_1 + \nu_2 + \dots = 0$), zeigt sich, daß K nur von T abhängt.

M. Dritter Hauptsatz der Thermodynamik.

(Nernstsches Wärmetheorem.)

Die Zustandsvariablen p , v , T sind ohne weiteres bestimmbar, die s , u , χ nur bis auf eine additive Konstante, die f und ψ nur bis auf eine lineare Funktion der Temperatur.

Die Berechnung von Gleichgewichten wird durch die Unbestimmtheit der additiven Konstanten nicht berührt, wohl aber durch den nicht bestimmbar Faktor von T in f und ψ .

Diese Schwierigkeit wird behoben durch den von *Nernst* aufgestellten Satz (in der Fassung von *Planck*):

Beim absoluten Nullpunkt $T = 0$ besitzt die Entropie für alle festen und flüssigen Phasen ein und denselben nicht unendlichen Wert, der gleich 0 gesetzt werden kann: $S_{T=0} = 0$.

Dann sind in solchen Stoffen alle Zustandsvariablen bis auf eine Konstante berechenbar. Es wird (unter Fortlassung der Konstanten) wegen

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p = \frac{C_p}{T}$$

$$(1) \quad S = \int_0^T \frac{C_p dT}{T} \quad (\text{Integration bei konstantem Druck}).$$

Damit $S_{T=0}$ endlich bleibt, muß gelten:

$$\lim_{T \rightarrow 0} C_p = 0.$$

Wegen

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p = \frac{C_p}{T}$$

¹⁾ C_p bedeutet hier $m c_p$ (Wärmekapazität), analog $C_v = m c_v$.

wird

$$(2) \quad S = \int_0^T \frac{C_v dT}{T} \quad (\text{Integration bei konstantem Volumen}),$$

also

$$\lim_{T=0} C_v = 0.$$

Ferner wird:

$$(3) \quad U = \int_0^T C_p dT \quad \text{bzw.} \quad U = \int_0^T C_p dT$$

$$(4) \quad F = U - TS = T \int_0^T \frac{U}{T^2} dT.$$

Eventuell sind in diesen Formeln noch Umwandlungswärmen zu berücksichtigen.

Es folgen weiter noch folgende Grenzwerte:

Wegen

$$\left(\frac{\partial C_p}{\partial p}\right)_T = -T \left(\frac{\partial^2 V}{\partial T^2}\right)_p,$$

und

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T$$

wird ferner

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -\int_0^T \frac{1}{T} \frac{\partial C_p}{\partial p} dT = \int_0^T \left(\frac{\partial^2 V}{\partial T^2}\right)_p dT = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \Big|_0^T$$

also

$$\lim_{T=0} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = 0.$$

Wegen

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_p$$

ist

$$\lim_{T=0} \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_p = -S_{T=0}$$

für alle festen und flüssigen Phasen gleich. Bedeutet demnach $F_1 - F_2 = A_{12}$ die bei der isothermen Umwandlung der Phase 1 in die Phase 2 maximal gewinnbare Arbeit, so ist

$$\lim_{T=0} \left(\frac{\partial A_{12}}{\partial T}\right)_{p_1, p_2} = 0.$$

Die obigen Formeln gelten aber nur für flüssige bzw. feste Phasen.

Für die gasförmige gelten die klassischen Beziehungen, speziell gilt für *ideale Gase*

$$S = C_p \ln T - \frac{MR}{m} \ln p + k$$

(also nicht $= 0$ für $T = 0$!)

ferner

$$\Psi = U - TS + pV = T \left(\frac{MR}{m} \ln p - C_p \ln T - C_p - k \right)$$

$i = \frac{m}{M}(C_p + k)$ heißt chemische Konstante.

Ist i bekannt, so sind auch für die Gase alle Zustandsvariablen angebar.

Die „*chemische Konstante*“ des betr. Gases ist vollkommen bestimmt und meßbar, wenn ein Weg gefunden wird, das ideale Gas auf reversiblen Wege in den festen oder flüssigen Zustand überzuführen.

Damit sind dann alle Zustandsvariablen aus thermischen Daten bestimmt und alle Gleichgewichte theoretisch berechenbar.

Literatur.

Planck: Thermodynamik (Leipzig: Veit & Co.), *Weber-Gans*: Repertorium der Physik, Bd. 1, 2. Hälfte (Leipzig: B. G. Teubner).

Anhang.

Quantentheorie.

Die Quantentheorie stellt eine Modifikation sowohl der Mechanik wie der Elektrodynamik dar. Ihre heutige Formulierung muß als noch provisorisch bezeichnet werden, da sie, trotz großer Erfolge in speziellen Fällen, noch nicht für alle Fälle hingeschrieben werden kann und da sie in einem gewissen Widerspruch zur klassischen Physik steht, ohne für diese eine Verbesserung angeben zu können.

Quantenmechanik.

Die Grundgesetze der Mechanik bleiben unverändert: Es sollen aber unter allen von der Mechanik als möglich betrachteten Bewegungen eines Systems nur eine beschränkte Anzahl tatsächlich vorkommen („Quantenzustände“). Außerdem sollen teils unter der Wirkung äußerer Impulse, teils auch spontan, nicht durch die Mechanik beherrschte „unmechanische“ Vorgänge stattfinden, die das System von einem Quantenzustand in einen anderen überführen. Die Übergangszeit muß als verschwindend klein angenommen werden. Die Art des Überganges entzieht sich aller Beurteilung.

Steht das betrachtete System unter der Wirkung von konservativen äußeren Kräften und werden diese langsam geändert, so ändert sich die Bewegungsform gleichfalls langsam. Die *Adiabatenhypothese* (*Ehrenfest*) behauptet, daß hierbei Quantenzustände als solche erhalten bleiben. (*Bohrs Prinzip der mechanischen Transformierbarkeit.*) „Langsam“ heißt dabei eine Änderung, falls sie in einer Zeit erfolgt, die so groß ist, daß das System während derselben alle möglichen Phasen seiner Bewegung durchlaufen hat, oder ihnen wenigstens sehr nahe gekommen ist.

Das ist einfach angebar bei einer rein periodischen Bewegung. Hier heißt es, die Änderung der äußeren Kräfte erfolge in einer Zeit, die groß ist gegen die Bewegungsperiode. Ist die Bewegung aber nicht periodisch, so durchläuft der Phasenpunkt des Systems ein gewisses Gebiet des Phasenraumes, und kommt jedem Punkt dieses Gebietes im Lauf der Zeit beliebig nahe. Hier ist also an Stelle der Periode die Zeit zu nehmen, in der der Phasenpunkt das ganze Gebiet überstrichen hat, d. h. jedem Punkt derselben nahegekommen ist.

Das Prinzip gestattet aus einer ganz im Endlichen liegenden, als Quantenbahn bekannten Bahn eine neue durch Variation (oder Einführung) äußerer Kräfte zu berechnen. Das Prinzip ist jedoch nicht mehr anwendbar, wenn während der Änderung der äußeren Kräfte das vom Phasenraum bestrichene Gebiet zu einem solchen von weniger Dimensionen degeneriert. (*Entartete Bahnen.*)

Eine Form der mathematischen Formulierung der Quantenmechanik ist folgende:

Man geht aus von der *Hamiltonschen* Funktion $H(p, q)$ (S. 192) und suche eine kanonische Transformation P_k, Q_k (S. 92 ff.) zu erreichen, daß H Funktion der neuen P_k allein wird. Dann werden wegen der *Hamiltonschen* Gleichung alle $\dot{P}_k = 0$, d. h. alle $P_k = \text{const.}$ Infolgedessen werden die

$$\dot{Q}_k = \frac{\partial H}{\partial P_k} = \omega_k = \text{const.}$$

also:

$$Q_k = \omega_k t + \delta_k.$$

Da die Q_k (falls nicht ω_k verschwindet) unbeschränkt wachsen, andererseits nur Bewegungen im Endlichen betrachtet werden sollen, muß Q_k eine Koordinate vom Charakter einer Winkelkoordinate sein, d. h. das System ändert seine Lage nicht, wenn wir Q_k um ein Vielfaches einer Größe s_k vermehren. Durch eine geeignete Transformation (Normierung) können wir immer $s_k = 2\pi$ machen. Dann heißt Q_k *Winkelvariable*; ω_k ist eine Frequenz, δ_k eine Phasenkonstante. Üblich sind dann statt P_k und Q_k für die normierten neuen Impuls- und Lagekoordinaten die Bezeichnungen J_k und φ_k .

Die Quantentheorie fordert jetzt:

$$J_k = \frac{n_k h}{2\pi},$$

wo n_k eine ganze Zahl („Quantenzahlen“) und

$$h = 6,54 \cdot 10^{-27}$$

sein soll. Während also die klassische Mechanik nur fordert, daß die J_k konstant sind, legt die Quantentheorie diese Konstanten auf diskrete Werte fest.

Eine andere Formulierung ist folgende:

Man geht aus von der *Hamilton-Jacobischen* Differentialgleichung und suche durch eine beliebige Transformation solche Variable, daß die Gleichung durch „Separation der Variablen“ gelöst werden kann, d. h. in einer Form:

$$S = \sum S_k(q_k, \alpha_1, \dots, \alpha_s),$$

wo die α_i zunächst willkürliche Integrationskonstanten sind und

$$S_k = \int p_k(q_k, \alpha_1, \dots, \alpha_s) dq_k.$$

Führt man diese Integration über den ganzen Variabilitätsbereich von q_k aus, so ist:

$$J_k = \frac{1}{2\pi} \oint p_k dq_k = \frac{n_k h}{2\pi}.$$

Hierdurch sind dann auch die α_i festgelegt.

Entartung tritt ein, sobald die ω_k kommensurable Größen sind, bzw. teilweise $= 0$ werden. Dann sind nämlich die J_k und w_k nicht mehr *eindeutig* zu bestimmen. Es werden also auch die Quantenbahnen nicht mehr eindeutig festgelegt. Die Energien bleiben aber trotzdem bestimmt. Z. B. ist die auf S. 97 behandelte Planetenbewegung ein entarteter Fall, weil zwei von den ω gleich Null werden. Nur P_1 ist festgelegt (große Achse). Besteht aber eine wenn auch kleine Abweichung vom *Coulombschen* Gesetz (Bewegung eines Elektrons um einen Atomrumpf), oder beachten wir die relativistische Abhängigkeit der Masse von der Geschwindigkeit, so ist auch P_2 , also die Exzentrizität, nicht mehr frei wählbar. Besteht schließlich noch ein gerichtetes äußeres elektrisches oder magnetisches Feld, so ist auch P_3 , die Neigung der Bahn, auf bestimmte Winkel beschränkt (*Richtungsquantelung*).

Quantenelektrodynamik.

Während die klassische Elektrodynamik eine kontinuierliche Ausstrahlung einer periodisch bewegten Ladung ergibt, gilt nach *Bohr*:

1. Elektronen in Quantenbahnen strahlen nicht.
2. Bei Übergang aus einer Quantenbahn in eine andere geringerer Energie tritt Emission einer monochromatischen Strahlung von der Schwingungszahl:

$$\nu = \frac{\Delta E}{h}$$

auf, wo ΔE die Energiedifferenz der beiden Quantenzustände bedeutet. Dieser Vorgang ist umkehrbar (Quantenabsorption).

Da die Quantenmechanik die Quantenbahnen und deren Energie liefert, so werden hiermit auch die möglichen Schwingungszahlen der Emission und Absorption festgelegt als Differenzen der möglichen $\frac{E}{h}$ (Kombinationsprinzip der Spektroskopie). Die Größen $\frac{E}{h}$ heißen „*Spektraltermine*“.

Für große Quantenzahlen geht die *Bohrsche* Theorie in die klassische Theorie über, wenn man durch ein *Auswahlprinzip* gewisse Forderungen über die *Übergangswahrscheinlichkeiten* aufstellt. Diese werden durch die *Korrespondenzhypothese* auch auf kleine Quantenzahlen verallgemeinert.

Beschreibt man die Bewegung eines Elektrons durch eine *Fourierdarstellung* von der Form:

$$x = \sum_n A_n e^{i n \omega t}$$

$$y = \sum_n B_n e^{i n \omega t}$$

$$z = \sum_n C_n e^{i n \omega t}$$

so setzt man in Korrespondenz:

die x zu der Differenz Δn der Quantenzahlen

die ω zu der Frequenz $2\pi\nu$.

Die Grundperiode ($n=1$) entspricht einem Übergang mit $\Delta n=1$; die nächste Oberschwingung ($n=2$) entspricht einem Übergang mit $\Delta n=2$,
usw.

Die Größen A_n , B_n , C_n der *Fourierreihe* sollen dann die Komponenten des elektrischen Vektors der ausgesandten Welle liefern, gerade so, wie sie es für die klassische Strahlung tun würden.

Durch diese Forderung ist sowohl die Polarisation der Welle festgelegt, wie auch die Intensität der zu verschiedenen Δn gehörenden Strahlungen, d. h. auch die Übergangswahrscheinlichkeiten für die Δn .

Literatur.

Born: Vorlesungen über Atommechanik (Berlin: Julius Springer). — Sommerfeld: Atombau und Spektrallinien (Braunschweig: Vieweg) u. a.

Einige physikalische Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

1. Verteilungswahrscheinlichkeit.

Teilt man das Gesamtvolumen V einer aus N gleichen Molekülen bestehenden Menge eines idealen Gases in eine große Zahl von Zellen vom Volumen v_i , so ist bei Abwesenheit von Fernkräften kein Grund anzugeben, warum irgend eines der Moleküle leichter in der einen als in der anderen Zelle liegen sollte. Man kann somit von der *Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Verteilung* reden. Es ist die Wahrscheinlichkeit für eine solche Verteilung der Moleküle auf jene Zellen, daß in der i -ten Zelle n_i Moleküle sind:

$$(1) \quad W(n_1, n_2, \dots) = N! \prod_i \left(\frac{v_i}{V} \right)^{n_i} \frac{1}{n_i!},$$

wo

$$\sum_i n_i = N,$$

denn die Wahrscheinlichkeit, daß irgendein bestimmtes Molekül gerade in der i -ten Zelle liegt, ist $\frac{v_i}{V}$, und der Faktor $\prod_i \frac{N!}{(n_i)!}$ rührt her von

der Identität sämtlicher Moleküle, die zur Folge hat, daß der Zustand des Gases als unverändert und die Verteilung als dieselbe gilt, wenn man irgendein Molekül einer Zelle mit irgendeinem Molekül einer anderen Zelle vertauscht.

Wählt man die Zellen so groß, daß in ihnen immer noch sehr viele Moleküle liegen, $n_i \gg 1$, so liefert die Anwendung der *Stirling*-schen Formel (vgl. S. 12) als wahrscheinlichste Verteilung die Gleichverteilung $\bar{n}_i = \frac{v_i}{V} N$ und für die Abweichungen $s_i = n_i - \bar{n}_i$ von dieser Verteilung das Gesetz:

$$(2) \quad W(s_1, s_2, \dots) = W_0 \cdot e^{-\sum \frac{s_i^2}{2\bar{n}_i}} ds_1 ds_2 \dots$$

Die Konstante W_0 folgt aus

$$(3) \quad \int_{-\bar{n}_i < s_i < N - \bar{n}_i} W(s_1, s_2, \dots) ds_1 ds_2 \dots = 1.$$

Die mittlere Schwankung in einer Zelle wird bestimmt durch:

$$(4) \quad \sqrt{s_i^2} = \sqrt{v_i(1 - p_i)}$$

und für den Fall

$$(4') \quad \frac{v_i}{V} \ll 1; \quad \sqrt{s_i^2} = \sqrt{\bar{n}_i} = \sqrt{\frac{v_i N}{V}}.$$

Die absoluten Dichteschwankungen sind also proportional der Wurzel aus der Dichte, die relativen Schwankungen $\frac{s_i}{\bar{n}_i}$ umgekehrt proportional der Wurzel aus der Dichte.

2. Brownsche Bewegung.

Teilchen, die in einem Gase oder einer Flüssigkeit suspendiert sind, führen infolge der Zusammenstöße mit den Molekülen Zickzackbewegungen aus, die um so größer sind, je kleiner die Teilchen sind. Diese unregelmäßigen Bewegungen folgen den Wahrscheinlichkeitsgesetzen. Beobachten wir die Zahl n der Teilchen, die in einem Bereiche v des Gesichtsfeldes eines Mikroskopes sichtbar sind in Zeitabständen τ , so müssen die Gesetze gelten, die für die unter A. 5. und D. (vgl. 147 ff.) gemachten Voraussetzungen zutreffen. Für die Wahrscheinlichkeit einer Beobachtung von n Partikeln gilt die *Poissons*-sche Formel

$$(1) \quad W(n) = \frac{e^{-\bar{n}} \cdot \bar{n}^n}{n!}, \quad \bar{n} = \frac{v}{V} N.$$

Die mittlere Schwankung ist $\sqrt{\bar{n}}$.

Zwei Beobachtungen, die einander folgen, sind durch Nachwirkung voneinander abhängig.

Die durchschnittliche Abweichung zweier aufeinanderfolgender Beobachtungen wird

$$(2) \quad \overline{(n_i - n_{i+1})} = P \cdot (n - \bar{n})$$

und die mittlere Abweichung

$$(2a) \quad \sqrt{\overline{(n_i - n_{i+1})^2}} = \sqrt{2P \cdot \bar{n}}.$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Teilchen innerhalb der Zeit t in einer gegebenen Richtung einen Weg zurücklegt, dessen Ende zwischen ξ und $\xi + d\xi$ liegt, ergibt sich aus kinetischen Überlegungen zu

$$(3) \quad W(\xi) d\xi = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-\frac{\xi^2}{4Dt}} d\xi.$$

D ist der „Diffusionskoeffizient“.

D bzw. $W(\xi)$ und P hängen eng miteinander zusammen, indem P hier die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, daß ein Teilchen bei der folgenden Beobachtung nicht wieder in v angetroffen wird.

Berücksichtigt man, daß im Durchschnitt der Weg, den ein Teilchen in der Zeit t zurücklegt, gleich Null ist, da ja keine Richtung vor ihrer entgegengesetzten ausgezeichnet ist, daß also die ξ auch als die Abweichungen vom Mittel angesehen werden können, so erkennt man sofort die Übereinstimmung mit dem *Gaußschen Fehlergesetz*. Es ist somit der mittlere Weg in der Zeit t

$$(4) \quad \sqrt{\xi^2} = \sqrt{2Dt},$$

woraus wiederum die Bedeutung des Diffusionskoeffizienten D ersichtlich wird.

3. Geschwindigkeitsverteilung eines idealen Gases.

Der Zustand eines Gases ist erst dann vollständig bestimmt, wenn außer der räumlichen Verteilung auch die *Geschwindigkeitsverteilung* der Moleküle gegeben ist.

Das *Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilungsgesetz* für ideale Gase lautet: Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Molekül eine Geschwindigkeit hat, deren Komponenten zu 3 aufeinander senkrechter Achsen zwischen ξ und $\xi + d\xi$, η und $\eta + d\eta$, ζ und $\zeta + d\zeta$ liegen:

$$(1) \quad dW(\xi, \eta, \zeta) = \left(\frac{3}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{3}{2\sigma^2}(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)} d\xi d\eta d\zeta$$

darin ist:

$$\sigma^2 \equiv \overline{\xi^2} + \overline{\eta^2} + \overline{\zeta^2} = 3\overline{\xi^2} = 3\overline{\eta^2} = 3\overline{\zeta^2}.$$

Ein Vergleich mit dem Fehlergesetz zeigt die vollkommene Übereinstimmung für jede Komponente. Die Voraussetzung, daß die Ge-

schwindigkeiten der Moleküle in den verschiedenen Richtungen unabhängig voneinander sind, begründet die Produktbildung.

Verallgemeinerung des Maxwell'schen Verteilungsgesetzes durch Boltzmann.

Hat man N Moleküle, deren Zustand durch je r Koordinaten $q_1^{(h)} \dots q_r^{(h)}$ und zugeordnete Impulse $p_1^{(h)} \dots p_r^{(h)}$ beschrieben ist ($h = 1, 2 \dots N$) und ist $E(q_1 \dots p_r)$ die totale Energie eines Moleküls, so herrschte mit überwiegender Wahrscheinlichkeit die Verteilung

$$(2) \quad f(q_1 \dots p_r) = A e^{-\frac{1}{kT} E(q_1 \dots p_r)} dq_1 \dots dp_r.$$

T = absolute Temperatur,

k = Boltzmann'sche Konstante = $1,37 \cdot 10^{-16}$.

Im Fall punktförmiger Molekülmassen m im Schwerfeld ist danach speziell

$$(3) \quad f = A e^{-\frac{1}{kT} \left(\frac{m}{2} v^2 + m g z \right)} dx \dots d(m)$$

Wird die kinetische Energie dargestellt durch

$$(4) \quad K = \frac{1}{2} \sum [(u_1^1)^2 + \dots + (u_r^N)^2]$$

(also $u_1^{(h)} = \sqrt{m} \dot{x}$ bei Punktmassen), so wird der Mittelwert

$$(5) \quad \overline{\frac{1}{2} (u_1^1)^2} = \dots = \overline{\frac{1}{2} (u_r^N)^2} = \dots = \overline{\frac{1}{2} (u_r^N)^2} = \frac{1}{2} kT.$$

Die Zahl der Moleküle, deren Energiewurzel \sqrt{E} zwischen den Grenzen \sqrt{E} und $\sqrt{E} + d\sqrt{E}$ liegt, ist

$$(6) \quad A e^{-\frac{E}{kT}} (\sqrt{E})^{6N-1} d(\sqrt{E}).$$

Im Mittel wird

$$(7) \quad \bar{E} = 3 N \frac{1}{2} kT, \quad \overline{(E - \bar{E})^2} = \frac{3}{2} N (kT)^2 \\ \overline{(E - \bar{E})^3} : (\bar{E})^3 = \frac{2}{3N}.$$

Schwankungen makroskopischer Größen.

Ist ω irgendeine (makroskopische) physikalische Größe, welche vom Volumen V und der Temperatur T abhängt, so sind die Schwankungen $\Delta\omega = \omega - \bar{\omega}$ in einem Teilvolumen v des Gesamtvolumens V beherrscht durch das Gesetz (H. A. Lorentz)

$$(8) \quad \overline{(\Delta\omega)^2} = k \frac{v}{v} \left[-T \left(\frac{\partial \omega / \partial v}{\partial p / \partial v} \right) \Big|_T + T^2 \cdot \left(\frac{\partial \omega / \partial T}{\partial E / \partial T} \right) \Big|_v \right] \\ \left[\left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_v = c_v = \text{spezif. Wärme} \right].$$

1. *Beispiel.* $\omega = \rho$ = Dichte = Masse pro Volumeinheit

$$(\Delta \rho)^2 = \frac{h}{v} \cdot \frac{T \rho}{\partial p / \partial \rho}.$$

Bei einem idealen Gase, mit N Molekülen pro Volumeinheit, $\bar{n} = Nv$ Molekülen in v , wo $p = kNT = \frac{h\rho}{m} T$, wird

$$(8a) \quad (\overline{\Delta N})^2 = \frac{N}{v}, \quad (\overline{\Delta n})^2 = \bar{n}.$$

2. *Beispiel.* $\omega = E$ = Energie pro Volumeinheit. In einer inkompressiblen Substanz ($\partial p / \partial \rho = \infty$) wird

$$(8b) \quad (\overline{\Delta E})^2 = \frac{h T^2}{\rho v} \cdot \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right).$$

4. Zeitliche und räumliche Gesamtheiten.

Faßt man ein bestimmtes Volumelement, die i -te Zelle, des Gases ins Auge, und betrachtet man in gewissen Zeitabständen die Zahl n der in jener Zelle befindlichen Moleküle, so gelten für sie die bei B. 9 gemachten Voraussetzungen. Es gilt somit für die Dichteschwankung des Gases in dieser Zelle das Gesetz:

$$(1) \quad W(s) ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{n}}} e^{-\frac{1}{2\bar{n}} s^2} ds.$$

Die mittlere Schwankung ist $\sqrt{\bar{n}}$ und die mittlere relative Schwankung $\frac{1}{\sqrt{\bar{n}}}$.

Ein gleiches Resultat für die Dichteschwankungen eines Gases bekommt man, wenn man statt *eine* Zelle zu *verschiedenen Zeiten* zu beobachten, *viele* gleiche, räumlich getrennte Zellen zur *selben* Zeit beobachtet. Zeitmittel und Raummittel stimmen ebenso wie die zeitlichen und räumlichen Schwankungen um diese Mittelwerte überein.

5. Statistische Wahrscheinlichkeit.

Als *statistische Wahrscheinlichkeit* (im Gegensatz zu der bisher behandelten mathematischen) für den „Zustand“ eines Systems bezeichnet man die ganze (meist große) Zahl von *Komplexionen*, die bei verschiedener Gruppierung der Elemente des Systems zu demselben Zustand führen.

Es gilt dann die Formel:

$$(1) \quad S = k \cdot \ln W + \text{const.}, \quad (\text{Boltzmann})$$

wo S die *Entropie* des Systems und k die *Boltzmannsche* Konstante bedeutet.

Folgende Beispiele sollen diese Methode, die Entropie zu berechnen, erläutern:

1. Ein ideales Gas, bestehend aus N gleichartigen Atomen der Masse m , erfülle ein Volumen V und besitze die Energie U . Sein Zustand sei gegeben durch die Funktion f , die die Verteilung der Atome auf den 6 dimensionalen Phasenraum (x, y, z, v_x, v_y, v_z) darstellt, so daß im Volumenteil $d\sigma = dx dy dz \cdot dv_x dv_y dv_z$ dieses Raumes die Zahl $f d\sigma$ Atome liegen.

Die Zahl der Komplexionen ist dann

$$(2) \quad W = \frac{N!}{H(f d\sigma)!}$$

$$(1') \quad \text{also } S = k(\ln N! - \sum \ln(f d\sigma)) + \text{const.},$$

wo die Summe über alle Volumenelemente des Phasenraumes zu erstrecken ist. Die Anwendung der *Stirlingschen* Formel liefert, falls N und alle $f d\sigma$ große Zahlen sind

$$(1'') \quad S = \text{const.} - k \int f \ln f d\sigma.$$

Die Funktion f ist natürlich von V und U nicht unabhängig, denn es muß gelten:

$$(3) \quad U = \frac{m}{2} \int v^2 f d\sigma$$

und f muß verschwinden für diejenigen Werte von x, y, z , die außerhalb von V liegen.

Soll der Zustand ein Gleichgewichtszustand sein, so muß S ein Maximum sein, also $\delta S = 0$ mit den Nebenbedingungen $\delta U = 0$ und $\delta N = \int \delta f d\sigma = 0$. Dadurch wird f bestimmt zu:

$$f = \alpha e^{-\beta v^2} \quad \text{mit } \alpha = \frac{N}{V} \cdot \left(\frac{3m}{4\pi U} \right)^{\frac{3}{2}} \quad \text{und } \beta = \frac{3mN}{4U}.$$

Das ergibt für S :

$$(4) \quad S = \text{const.} + k N \ln \left(U^{\frac{3}{2}} V \right).$$

2. Dasselbe Resultat folgt auch durch Betrachtungen im $6N$ dimensionalen Phasenraum $(x_1, y_1, z_1, x_2, \dots, x_N, v_{1x}, \dots, v_{Nx})$, in dem die Lagen und Geschwindigkeiten aller N Atome durch einen Punkt bestimmt sind.

Wir teilen den Raum ein in gleichgroße Volumenelemente $d\omega$, indem wir zunächst Flächen $U = \text{const.}$ legen, und die gebildeten Schalen weiter beliebig unterteilen. Da U gegeben ist, muß sich unser Phasenpunkt in der Schale zwischen U und $U + dU$ befinden, wo dU beliebig klein sein mag. Die Zahl der Komplexionen wird dann proportional zu dem Volumen dieser Schale, so weit sie innerhalb V liegt. Eine einfache Abschätzung liefert dies Volumen zu $\alpha \cdot V^N \cdot U^{\frac{3}{2}N-1} dU$, wo α ein Zahlenfaktor ist.

Also wird auch hier wieder $S = kN \ln(U^{\frac{8}{3}}V) + \text{const}$ (wegen $N \gg 1$).

3. Eine Anzahl von N gleichartigen Resonatoren enthalte die Energie U . Die Verteilung dieser Energie soll irgendwie sein. Wir teilen zunächst U in P Beträge der Größe ε ($U = P\varepsilon$). Dann ist die Zahl der möglichen Verteilungen $= \frac{(N+P-1)!}{(N-1)! P!}$ also falls P und $N \gg 1$ ist

$$(5) \quad S = k((N+P) \ln(N+P) - N \ln N - P \ln P) + \text{const.}$$

Setzen wir $\bar{u} = \frac{U}{N}$, d. h. \bar{u} gleich der mittleren Energie eines Resonators, so wird

$$(5') \quad S = k \left\{ \left(1 + \frac{\bar{u}}{\varepsilon}\right) \ln \left(1 + \frac{\bar{u}}{\varepsilon}\right) - \frac{\bar{u}}{\varepsilon} \ln \frac{\bar{u}}{\varepsilon} \right\} + \text{const.}$$

oder mit Benutzung der Formel $\frac{\partial S}{\partial U} = \frac{1}{T}$

$$(6) \quad \bar{u} = \frac{\varepsilon}{e^{\frac{1}{kT}} - 1}$$

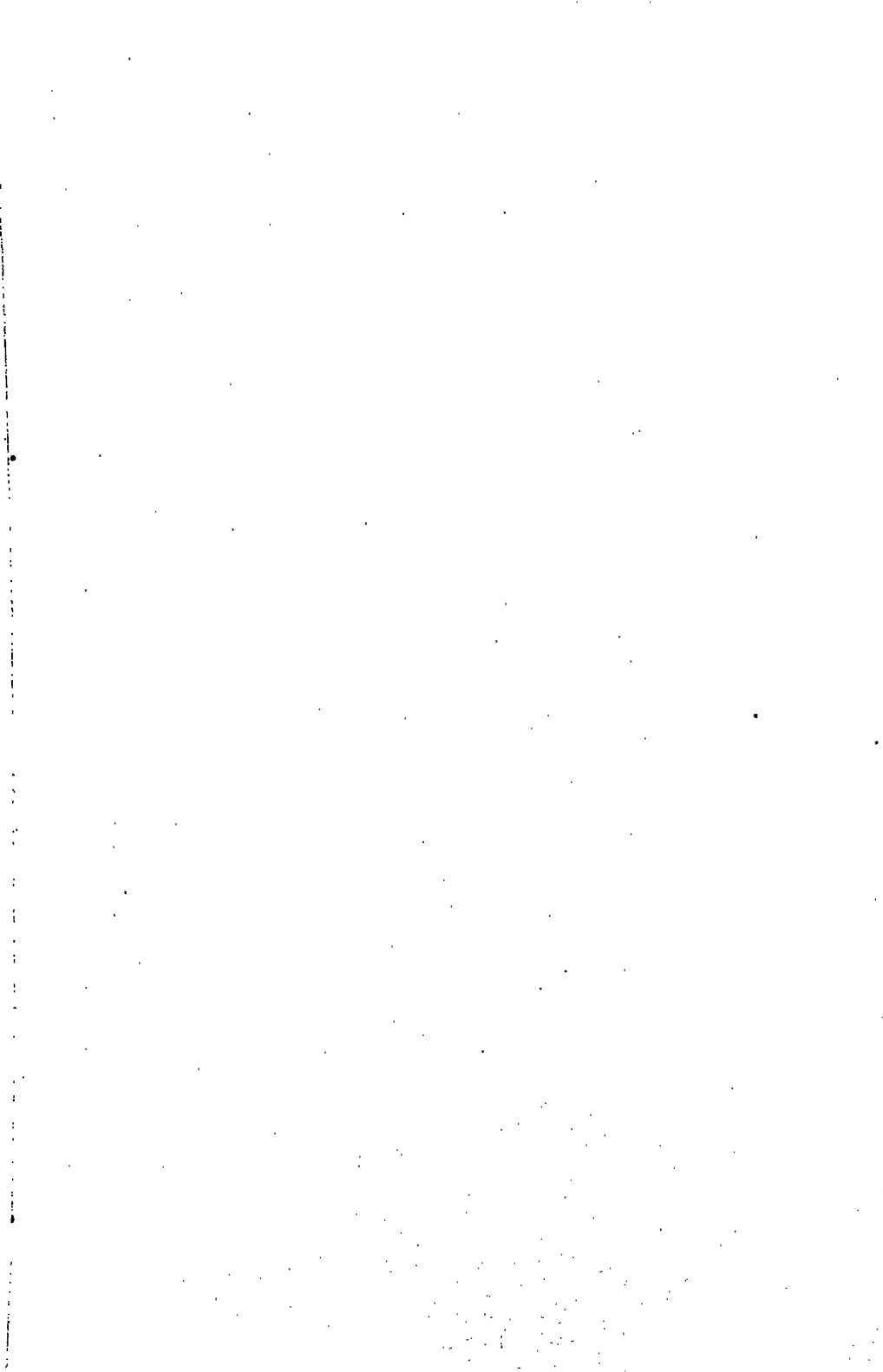
so daß für verschwindendes ε $\bar{u} = kT$ wird.

Die Quantentheorie (Planck) setzt $\varepsilon = h\nu$, wo $h = 6,54 \cdot 10^{-27}$ eine Konstante, das *Wirkungsquantum*, und ν die Frequenz (Schwingungszahl) der Resonatoren bedeutet. Dies führt in Übereinstimmung mit der Erfahrung (spezif. Wärme fester Körper) zu:

$$(6') \quad \bar{u} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$

Literatur.

Fürth: s. S. 151, H. A. Lorentz: s. S. 151, u. a.



Tabellen.

Die folgenden Tabellen für r^n , $\cos n\varphi$ und $\sin n\varphi$ sind u. a. nützlich zur Berechnung von $z^n = (x + iy)^n = \varrho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$.

r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9	r^{10}
0,1	0,01	0,0010	0,0001	—	—	—	—	—	—
0,2	0,04	0,008	0,0016	0,0003	0,0001	—	—	—	—
0,3	0,09	0,027	0,0081	0,0024	0,0007	0,0002	0,0001	—	—
0,4	0,16	0,064	0,0256	0,0102	0,0041	0,0016	0,0007	0,0003	0,0001
0,5	0,25	0,125	0,0625	0,0312	0,0156	0,0078	0,0039	0,0020	0,0010
0,6	0,36	0,216	0,1296	0,0778	0,0467	0,0280	0,0168	0,0101	0,0060
0,7	0,49	0,343	0,2401	0,1681	0,1176	0,0824	0,0576	0,0404	0,0282
0,8	0,64	0,512	0,4096	0,3277	0,2621	0,2097	0,1678	0,1342	0,1074
0,9	0,81	0,729	0,6561	0,5905	0,5314	0,4783	0,4305	0,3874	0,3487
1,—	1,—	1,—	1,—	1,—	1,—	1,—	1,—	1,—	1,—
1,1	1,21	1,331	1,4641	1,6105	1,7716	1,9487	2,1436	2,3579	2,5937
1,2	1,44	1,728	2,0736	2,4883	2,9860	3,5831	4,2998	5,1598	6,1917
1,3	1,69	2,197	2,8561	3,7129	4,8268	6,2749	8,1573	10,6545	13,7858
1,4	1,96	2,744	3,8416	5,3782	7,5295	10,5414	14,7579	20,6610	28,9255
1,5	2,25	3,375	5,0625	7,5937	11,3906	17,0859	25,6289	38,4434	57,6650
1,6	2,56	4,096	6,5536	10,4858	16,7772	26,8435	42,9497	68,7195	109,9512
1,7	2,89	4,913	8,3521	14,1986	24,1376	41,0339	69,7576	118,5879	201,5994
1,8	3,24	5,832	10,4976	18,8957	34,0122	61,2220	110,1996	198,3593	357,0467
1,9	3,61	6,859	13,0321	24,7610	47,0459	89,3872	169,8356	322,6877	613,1066
2,—	4,—	8,—	16,—	32,—	64,—	128,—	256,—	512,—	1024,—

φ	$\cos \varphi$	$\cos 2 \varphi$	$\cos 3 \varphi$	$\cos 4 \varphi$	$\cos 5 \varphi$	$\cos 6 \varphi$	$\cos 7 \varphi$	$\cos 8 \varphi$	$\cos 9 \varphi$
10°	0,9848	9397	8660	7660	6428	5000	3420	1736	0
20°	0,9397	7660	5000	1736	—1736	—5000	—7660	—9397	—1
30°	0,8660	5000	0,—	—5000	—8660	—1,—	—6860	—5000	0
40°	0,7660	1736	—5000	—9397	—9397	—5000	1736	7660	+1
50°	0,6428	—1736	—8660	—9397	—3420	5000	9848	7660	0
60°	0,5000	—5000	—1,—	—5000	5000	+1,—	5000	—5000	—1
70°	0,3420	—7660	—8660	1736	9848	5000	—6428	—9397	0
80°	0,1736	—9397	—5000	7660	7660	—5000	—9397	1736	+1
90°	0,—	—1,—	0,—	+1,—	0,—	—1,—	0,—	+1,—	0

100°	—1736	—9397	5000	7660	—7660	—5000	9397	1736	—1
110°	—3420	—7660	8660	1736	—9848	5000	6428	—9397	0
120°	—5000	—5000	+1,—	—5000	—5000	1,—	—5000	—5000	+1
130°	—6428	—1736	8660	—9397	+3420	5000	—9848	7660	0
140°	—7660	1736	5000	—9397	+9397	—5000	—1736	7660	—1
150°	—8660	5000	0,—	—5000	+8660	—1,—	8660	—5000	0
160°	—9397	7660	—5000	1736	+1736	—5000	7660	—9397	+1
170°	—9848	9397	—8660	7660	—6428	5000	—3420	1736	0
180°	—1,—	+1,—	—1,—	+1,—	—1,—	+1,—	—1,—	+1,—	—1

φ	$\sin \varphi$	$\sin 2 \varphi$	$\sin 3 \varphi$	$\sin 4 \varphi$	$\sin 5 \varphi$	$\sin 6 \varphi$	$\sin 7 \varphi$	$\sin 8 \varphi$	$\sin 9 \varphi$
10°	0,1736	3420	5000	6428	7660	8660	9397	9848	+1,—
20°	0,3420	6428	8660	9848	9848	8660	6428	3420	0,—
30°	0,5000	8660	1,—	8660	5000	0,—	—5000	—8660	—1
40°	0,6428	9848	8660	3420	—3420	—8660	—9848	—6428	0
50°	0,7660	9848	5000	—3420	—9397	—8660	—1736	6428	+1
60°	0,8660	8660	0,—	—8660	—8660	0,—	8660	8660	0
70°	0,9397	6428	—5000	—9848	—1736	8660	7660	—3420	—1
80°	0,9848	3420	—8660	—6428	+6428	8660	—3420	—9848	0
90°	+1,—	0,—	—1,—	0,—	+1,—	0,—	—1,—	0,—	+1
100°	9848	—3420	—8660	6428	6428	—8660	—3420	9848	0
110°	9397	—6428	—5000	9848	—1736	—8660	7660	3420	—1
120°	8660	—8660	0,—	8660	—8660	0,—	8660	—8660	0
130°	7660	—9848	5000	3420	—9397	8660	—1736	—6428	+1
140°	6428	—9848	8660	—3420	—3420	8660	—9848	6428	0
150°	5000	—8660	1,—	—8660	5000	0,—	—5000	8660	—1
160°	3420	—6428	8660	—9848	9848	—8660	+6428	—3420	0
170°	1736	—3420	5000	—6428	7660	—8660	9397	—9848	+1
180°	0,—	0,—	0,—	0,—	0,—	0,—	0,—	0,—	0

Binomial-Koeffizienten: $\binom{m}{n}$

n ist hier immer eine ganze positive Zahl.

m kann beliebige positive oder negative Werte haben.

$n =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$m = 1$	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

$n =$	0	1	2	3	4	5	6
$m = -1$	1	—1	+1	—1	+1	—1	+1
—2	1	—2	3	—4	+5	—6	+7
—3	1	—3	6	—10	+15	—21	+28
—4	1	—4	10	—20	35	—56	+84
—5	1	—5	15	—35	70	—126	+210

$n =$	0	1	2	3	4	5
$n = -\frac{7}{2}$	1	$-\frac{7}{2}$	$\frac{93}{8}$	$-\frac{281}{16}$	$\frac{8008}{128}$	$\frac{9009}{256}$
$-\frac{5}{2}$	1	$-\frac{5}{2}$	$\frac{85}{8}$	$-\frac{105}{16}$	$\frac{1155}{128}$	$\frac{8008}{256}$
$-\frac{3}{2}$	1	$-\frac{3}{2}$	$\frac{15}{8}$	$-\frac{85}{16}$	$\frac{815}{128}$	$-\frac{698}{256}$
$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{8}{8}$	$-\frac{5}{16}$	$+\frac{85}{128}$	$-\frac{68}{256}$
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$-\frac{5}{128}$	$\frac{7}{256}$
$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$+\frac{8}{8}$	$-\frac{1}{16}$	$+\frac{8}{128}$	$-\frac{8}{256}$
$\frac{5}{2}$	1	$\frac{5}{2}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{5}{16}$	$-\frac{5}{128}$	$-\frac{8}{256}$
$\frac{7}{2}$	1	$\frac{7}{2}$	$\frac{85}{8}$	$\frac{85}{16}$	$\frac{85}{128}$	$-\frac{7}{256}$

$n =$	0	1	2	3	4	5
$n = -\frac{4}{3}$	1	$-\frac{4}{3}$	$\frac{14}{9}$	$-\frac{140}{81}$	$\frac{455}{243}$	$-\frac{1459}{729}$
$-\frac{2}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{5}{9}$	$-\frac{40}{81}$	$\frac{110}{243}$	$-\frac{808}{729}$
$-\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$-\frac{14}{81}$	$\frac{85}{243}$	$-\frac{91}{729}$
$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{9}$	$\frac{5}{81}$	$-\frac{10}{243}$	$\frac{22}{729}$
$\frac{2}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{9}$	$\frac{4}{81}$	$-\frac{7}{243}$	$\frac{14}{729}$
$\frac{4}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{9}$	$-\frac{4}{81}$	$\frac{5}{243}$	$-\frac{8}{729}$

$n =$	0	1	2	3	4	5
$n = -\frac{5}{4}$	1	$-\frac{5}{4}$	$\frac{45}{32}$	$-\frac{195}{128}$	$\frac{8815}{2048}$	$-\frac{18928}{8192}$
$-\frac{3}{4}$	1	$-\frac{3}{4}$	$\frac{21}{32}$	$-\frac{77}{128}$	$\frac{1155}{2048}$	$-\frac{4989}{8192}$
$-\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{15}{32}$	$-\frac{15}{128}$	$\frac{195}{2048}$	$-\frac{668}{8192}$
$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{8}{32}$	$\frac{7}{128}$	$-\frac{77}{2048}$	$\frac{881}{8192}$
$\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{8}{32}$	$\frac{5}{128}$	$-\frac{45}{2048}$	$\frac{117}{8192}$
$\frac{5}{4}$	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{32}$	$-\frac{5}{128}$	$\frac{85}{2048}$	$-\frac{77}{8192}$

Dieselben in Dezimalbrüchen geschrieben:

$n =$	0	1	2	3	4	5
$m = -\frac{7}{2}$	1	-3,5	7,875	-14,437	23,461	35,191
$-\frac{5}{2}$	1	-2,5	4,375	-6,5625	9,0234	11,7305
$-\frac{3}{2}$	1	-1,5	1,875	-2,1875	2,4609	2,7070
$-\frac{1}{2}$	1	-0,5	0,375	-0,3125	0,2734	0,2461
$\frac{1}{2}$	1	0,5	-0,125	0,0625	-0,0391	0,0273
$\frac{3}{2}$	1	1,5	0,375	-0,0625	0,0234	-0,0117
$\frac{5}{2}$	1	2,5	1,875	0,3125	-0,0391	+0,0117
$\frac{7}{2}$	1	3,5	4,375	2,1875	0,2734	-0,0273

$n =$	0	1	2	3	4	5
$m = -\frac{4}{3}$	1	-1,33	1,556	-1,7284	1,8724	-1,9973
$-\frac{2}{3}$	1	-0,66	0,556	-0,4938	0,4527	-0,4225
$-\frac{1}{3}$	1	-0,33	0,222	-0,1728	0,1440	-0,1248
$\frac{1}{3}$	1	0,33	-0,111	0,0617	-0,0412	0,0302
$\frac{2}{3}$	1	0,667	-0,111	0,0494	-0,0288	0,0192
$\frac{4}{3}$	1	1,33	0,2222	-0,0494	0,0206	-0,0110

$n =$	0	1	2	3	4	5
$m = -\frac{5}{4}$	1	-1,25	1,40625	-1,5234	1,6187	-1,6996
$-\frac{3}{4}$	1	-0,75	0,65625	-0,6016	0,5640	-0,5358
$-\frac{1}{4}$	1	-0,25	0,15625	-0,1172	0,0952	-0,0809
$\frac{1}{4}$	1	0,25	-0,09375	0,0547	-0,0376	0,0282
$\frac{3}{4}$	1	0,75	-0,09375	0,03906	-0,0220	0,0143
$\frac{5}{4}$	1	1,25	0,15625	-0,03906	0,0171	-0,0094

Reihen-Koeffizienten.

n	$\frac{1}{n}$	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$	$n!$	$1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)$	$2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n$
1	1,—	1,—	1	1	2
2	0,5—	1,5—	2	3	8
3	0,33333	1,83333	6	15	48
4	0,25—	2,08333	24	105	384
5	0,2—	2,28333	120	945	3840
6	0,16667	2,45—	720	10395	46080
7	0,14286	2,59286	5040	135135	645120
8	0,125—	2,71786	40320	2·027025	10·321920
9	0,11111	2,82897	362880	34·459425	185·794560
10	0,1—	2,92897	3·628800	654·729075	3715·891200

n	$\frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}$	$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}$
1	1,— = 1	0,5— = $\frac{1}{2}$
2	0,66667 = $\frac{2}{3}$	0,375— = $\frac{3}{8}$
3	0,4— = $\frac{2}{5}$	0,3125— = $\frac{5}{16}$
4	0,22857 = $\frac{8}{35}$	0,27344 = $\frac{85}{128}$
5	0,12698 = $\frac{8}{63}$	0,24609 = $\frac{68}{256}$
6	0,06926 = $\frac{16}{231}$	0,22559 = $\frac{281}{1024}$
7	0,03730 = $\frac{16}{429}$	0,20947 = $\frac{429}{2048}$
8	0,01989 = $\frac{128}{6435}$	0,19638 = $\frac{6485}{32768}$
9	0,01053 = $\frac{128}{12165}$	0,18547 = $\frac{12155}{65536}$
10	0,00554 = $\frac{256}{46189}$	0,17620 = $\frac{46189}{262144}$

Energie-

	erg	g-Gew. cm	kg-Gew. m	PS sec	PS st
erg	1	$1,02 \cdot 10^{-8}$	$1,02 \cdot 10^{-8}$	$1,36 \cdot 10^{-10}$	$3,77 \cdot 10^{-14}$
g-Gew. cm . .	981	1	10^{-5}	$1,33 \cdot 10^{-7}$	$3,69 \cdot 10^{-11}$
kg-Gew. m . .	$9,81 \cdot 10^7$	10^8	1	$1,33 \cdot 10^{-8}$	$3,69 \cdot 10^{-8}$
PS sec	$7,36 \cdot 10^9$	$7,5 \cdot 10^8$	75	1	$2,78 \cdot 10^{-4}$
PS st	$2,65 \cdot 10^{18}$	$2,7 \cdot 10^{10}$	$2,70 \cdot 10^8$	$3,6 \cdot 10^8$	1
Wattsec. . . .	10^9	$1,02 \cdot 10^4$	$1,02 \cdot 10^{-1}$	$1,36 \cdot 10^{-8}$	$3,77 \cdot 10^{-7}$
Kilowattst. . .	$3,6 \cdot 10^{18}$	$3,67 \cdot 10^{10}$	$3,67 \cdot 10^8$	$4,89 \cdot 10^8$	1,35
Liter Atm. . .	$1,0133 \cdot 10^9$	$1,03 \cdot 10^8$	$1,03 \cdot 10^1$	$1,38 \cdot 10^{-1}$	$3,82 \cdot 10^{-8}$
g cal.	$4,188 \cdot 10^7$	$4,271 \cdot 10^4$	$4,27 \cdot 10^{-1}$	$5,69 \cdot 10^{-8}$	$1,58 \cdot 10^{-8}$
Volt-Elektron .	$1,59 \cdot 10^{-18}$	$1,62 \cdot 10^{-18}$	$1,62 \cdot 10^{-20}$	$2,16 \cdot 10^{-20}$	$6,00 \cdot 10^{-28}$
$h\nu$	$2,15 \cdot 10^{-11}$	$2,19 \cdot 10^{-14}$	$1,19 \cdot 10^{-10}$	$2,92 \cdot 10^{-21}$	$8,10 \cdot 10^{-28}$
Volt-Elekt.-Z .	$0,964 \cdot 10^{18}$	$0,984 \cdot 10^9$	$0,984 \cdot 10^4$	$1,31 \cdot 10^8$	$3,64 \cdot 10^{-8}$

Elektrizitäts-

	CGS stat.	CGS magn.	Amp./sec (= Coulomb)
CGS stat.	1	$0,33 \cdot 10^{-10}$	$0,33 \cdot 10^{-9}$
CGS magn.	$3 \cdot 10^{10}$	1	10
Amp. sec (= Coulomb)	$3 \cdot 10^9$	0,1	1
Z·e = Grammäquiv. .	$2,896 \cdot 10^{14}$	$9,654 \cdot 10^8$	$9,654 \cdot 10^4$
Elektronen	$4,76 \cdot 10^{-10}$	$1,56 \cdot 10^{-20}$	$1,56 \cdot 10^{-18}$
gr. Ag	$2,71 \cdot 10^{18}$	$0,894 \cdot 10^8$	$0,894 \cdot 10^8$
$\text{cm}^3 \text{H}_2\text{O}$ (Knallgas) .	$1,76 \cdot 10^{10}$	0,581	5,81

einheiten.

Wattsec.	Kilowattst.	Liter Atm.	g cal.	Volt-Elektron	hN	Volt-Elektron $\cdot Z$
10^{-7}	$2,78 \cdot 10^{-14}$	$9,86 \cdot 10^{-10}$	$2,39 \cdot 10^{-8}$	$6,29 \cdot 10^{11}$	$4,65 \cdot 10^{10}$	$1,01 \cdot 10^{-12}$
$9,81 \cdot 10^{-8}$	$2,72 \cdot 10^{-11}$	$9,67 \cdot 10^{-7}$	$2,34 \cdot 10^{-8}$	$6,17 \cdot 10^{14}$	$4,56 \cdot 10^{13}$	$1,01 \cdot 10^{-9}$
9,81	$2,72 \cdot 10^{-8}$	$9,67 \cdot 10^{-2}$	2,34	$6,17 \cdot 10^{19}$	$4,56 \cdot 10^{18}$	$1,01 \cdot 10^{-4}$
736	$2,05 \cdot 10^{-4}$	7,26	$1,76 \cdot 10^3$	$4,63 \cdot 10^{21}$	$3,42 \cdot 10^{20}$	$7,63 \cdot 10^{-4}$
$2,65 \cdot 10^8$	$7,37 \cdot 10^{-1}$	$2,61 \cdot 10^4$	$6,33 \cdot 10^5$	$1,67 \cdot 10^{25}$	$1,23 \cdot 10^{24}$	$2,75 \cdot 10^1$
1	$2,78 \cdot 10^{-7}$	$9,86 \cdot 10^{-8}$	$2,39 \cdot 10^{-1}$	$6,29 \cdot 10^{18}$	$4,65 \cdot 10^{17}$	$1,03 \cdot 10^{-5}$
$3,6 \cdot 10^6$	1	$3,55 \cdot 10^4$	$8,60 \cdot 10^5$	$2,26 \cdot 10^{25}$	$1,67 \cdot 10^{24}$	$3,73 \cdot 10^1$
$1,01 \cdot 10^9$	$2,81 \cdot 10^{-6}$	1	$2,42 \cdot 10^1$	$6,37 \cdot 10^{20}$	$4,72 \cdot 10^{19}$	$1,05 \cdot 10^{-8}$
4,19	$1,16 \cdot 10^{-6}$	$4,13 \cdot 10^{-2}$	1	$2,63 \cdot 10^{19}$	$1,95 \cdot 10^{18}$	$4,33 \cdot 10^{-5}$
$1,59 \cdot 10^{-10}$	$4,42 \cdot 10^{-28}$	$1,57 \cdot 10^{-21}$	$3,80 \cdot 10^{-20}$	†	$7,41 \cdot 10^{-2}$	$1,65 \cdot 10^{-24}$
$2,15 \cdot 10^{-18}$	$5,99 \cdot 10^{-25}$	$2,12 \cdot 10^{-20}$	$5,14 \cdot 10^{-19}$	13,5	1	$2,23 \cdot 10^{-28}$
$0,964 \cdot 10^5$	$2,68 \cdot 10^{-2}$	$0,950 \cdot 10^3$	$2,31 \cdot 10^4$	$6,06 \cdot 10^{23}$	$4,48 \cdot 10^{22}$	1

$N = \text{Rydbergkonstante} = 3,29 \cdot 10^{15} \text{ t}^{-1} = 3 \cdot 10^{10} \cdot 109\,737,11,$

$h = 6,54 \cdot 10^{-27}$ (Wirkungsquantum).

$Z = 6,06 \cdot 10^{23}$ (Moleküle pro Mol).

mengeneinheiten.

Grammäquiv.	Elektronen	gr · Ag	cm ³ H ₂ O
$3,45 \cdot 10^{-15}$	$2,10 \cdot 10^9$	$0,369 \cdot 10^{-18}$	$0,057 \cdot 10^{-9}$
$1,037 \cdot 10^{-4}$	$6,41 \cdot 10^{19}$	$1,118 \cdot 10^{-8}$	1,74
$1,037 \cdot 10^{-5}$	$6,41 \cdot 10^{18}$	$1,118 \cdot 10^{-9}$	0,1740
1	$6,19 \cdot 10^{23}$	$1,069 \cdot 10^3$	$0,165 \cdot 10^5$
$1,62 \cdot 10^{-24}$	1	$1,753 \cdot 10^{-28}$	$0,271 \cdot 10^{-13}$
$9,35 \cdot 10^{-8}$	$5,69 \cdot 10^{21}$	1	$0,154 \cdot 10^3$
$6,07 \cdot 10^{-5}$	$3,69 \cdot 10^{10}$	$0,649 \cdot 10^{-2}$	1

$Z = \text{Avogadro'sche Konstante} = 6,06 \cdot 10^{23}.$

Namen- und Sachverzeichnis.

Die Zahlen geben die Seiten an.

- Absorptionskoeffizient 222
- Achsen, optische 224
- Additionstheorem d. Geschw. 232
- Algebraische Funktionen 47
- Ausdehnungskoeffizient 248

- Bernoullische* Zahlen 54
- Berührungstransformation 91
- Besselsche* Differentialgleichung 63
- " Funktionen 63
- Bestimmte Integrale 41
- Bewegungsgröße 190, 217
- Binomialkoeffizienten 11, 274
- Biot-Savart'sches* Gesetz 215
- Boltzmann'sche* Konstante 198, 248, 268
- Brechungsindex 221
- " komplexer 132
- Brownsche* Bewegung 266

- Carnot*prozeß 252
- Cauchy's* Fundamentalsatz 35
- Charakteristische Gleichung 9, 108
- Chemische Konstante 261
- Clausius-Clapeyron'sche* Gleichung 257

- D'Alembert*, Prinzip von 187
- Dalton'sches* Gesetz 251
- Dämpfung 118
- Definite Formen 79
- Deformationstensor 204
- Determinanten 6, 80
- Dielektrizitätskonstante 212
- Differentialausdrücke, Umformung von 14
- Differentiation, numerische 23
- Differenzenrechnung 22
- Diffusionskoeffizient 267
- Dilatation 204
- Dimensionen 229
- Dipolstrahlung 220
- Divergenz 154
- Doppelfläche 160
- Doppelquelle 160

- Drehachse 200
- Drehimpuls 200
- Drehmoment 200
- Dreieinzeissymbole 173

- Eigenfrequenz 118
- " funktionen 139
- " lösung 5
- " wert 139
- " zeit 232
- Eindimensionale Differentialgl. 100, 113
- Einheitstensor 164
- Einheitsvektor 152
- Elastizitätskoeffizient 206, 250
- Elliptische Funktionen 72
- " Integrale 71
- " Koordinaten 78
- Energieeinheiten 278
- Energie, elektromagnetische 217, 236
- " kinetische 190, 239
- " potentielle 191, 206, 240
- " thermodynamische 245
- Entropie 198, 247, 269
- Entwicklung nach Kugelfunktionen 62
- " " Potenzen 36
- " " Zylinderfunktionen 69
- Ergodenhypothese 197
- Erweiterung 176
- Euler'sche* Gleichungen 202, 210
- " sches Integral 70
- " sche Konstante 65
- Euler-Lagrange'sche* Differentialgl. 142
- Exakte Differentialgl. 114
- Exponentialfunktion 50
- Extremalen 142

- Felder 157
- Feldstärke 212
- Fehlergesetz (*Gauß*) 149
- Flächenintegral 154
- Flächensatz 194

Flächenwirbel 161
 Fortsetzung, analytische 39
Fouriersches Integral 30
 „ *sche* Reihe 29
 Freie Energie 247
 „ Ladungen 213
 „ Vektoren 152
Fresnelsche Gleichung 224
 Funktionen, analytische 34
 „ spezielle 47 ff.
 Funktionentheorie 33 ff.
 Gammafunktion 70
 Ganze Funktionen 47
 Gaskonstante 248, 250
Gaußscher Satz 155
 Gemische 250
 Gemischte Komponenten 172
 Generalisierte Koordinaten 193
 Geometrische Optik 221
 Gleichgewicht 198
 Gleichungssystem 3
 Gradient 154
 Gradiententensor 167
Graesche Funktion 111, 138
 „ *scher* Satz 155
 Grundvektoren 171
Hamiltonsche Funktion 92, 189, 192
 „ *Kanon. Bewgl.* 92, 189, 192
Hamilton-Jacobische Differentialgl. 189, 193
Hamilton, Prinzip von 187
Hankelsche Funktionen 65
 Hauptachsentransformation 5
 Hauptsätze, thermodynamische 245, 254, 259
Heavyside-Ellipsoid 220
Herpolhodiehurus 202
Hertzscher Vektor 132, 219, 237
 Hohlraumstrahlung 251
 Homogene Differentialgleichung 99, 108
 „ *lineare* Gleichungssysteme 3
 „ *Koordinaten* 77
 „ *Randbedingungen* 111, 135
Hookesches Gesetz 205
 Hyperbolische Funktionen 53
 Hypergeometrische Reihe 83
 Hydrodynamischer Druck 210
 Ideale Gase 249
 Impuls 190, 200
 Impuls-Energietensor 240
 Infinitesimale Transformationen 79, 93
 Integrale, bestimmte. 20

Integralgleichung 138 ff.
 Integration im Komplexen 41
 „ *numerische* 24
 Integrationsmethoden 16
 Intermediäres Integral 100
 Interpolation 24
 Invarianten 81, 174
 Irreguläre Punkte 34, 40, 44
 Iteration 140, 164
Jacobi, Prinzip von 188
Jacobische elliptische Funktionen 75
Kanonische Differentialgleichung 92, 189, 192
Kanonische Transformation 92
 Kombination 11
 Komplexe Größen 33
 „ *Vektoren* 169
 „ *Integration* 41
 Komponenten 170 ff.
 Kompressibilität 206, 248
 Konforme Abbildungen 35
 Konjugiert komplex 34
 Konjugierte Matrix 7
 Konjugierte Potentialfunktion 34
 Konservative Kraft 191
 Kontakt-Transformation 91
 Kontinuitätsgleichung 203
 Kontravariante Komponenten 170
 Konvergenz 25
 Konvergenzbereich 36
 Koordinaten, orthogonale 177
 „ *-systeme* 82 ff.
 Kovariante Komponenten 171
 Kraftlinie 176, 213
 Kräftefunktion 191
 Kreisel 201
 Kreisprozeß 252
 Kristalloptik 222
 Kritischer Punkt 253
 Krümmungstensor 176
 Kugelfunktionen 54
 Ladung 212
Lagrangessche Bewegungsgleichungen 185, 188, 192
Lagrangessche Differentialgleichung 142
 „ *Faktoren* 143
 „ *Funktion* 94, 187, 192
 „ *Klammer* 96
Laurentische Reihe 41
Legendresche Kugelfunktionen 54
 „ *Transformation* 91, 105, 247

Lineare Differentialgleichungen 107
 Lineare Differentialgleichungen, System homogener 123
 Lineare Differentialgleichungen, 2. Ordnung 114
 Lineare Funktionen 47
 " Gleichungssysteme 3
 " Transformation 77
 " Vektorfeldfunktion 162
 Linienintegral 154
 Liouvillesche Sätze 74, 197
 Logarithmus 50
 Lorentztransformationen 230
 Mac Laurinsche Reihe 29
 Massenwirkungsgesetz 258
 Maßsysteme 226, 228
 Matrices 6, 78
 Maxwellsche Gleichungen 131, 216
 Mitführungskoeffizient 232
 Minoren 7
 Mittelwert 148, 150
 Modul 72
 Moment 160
 Nabla 157
 Neumannsche Reihe 140
 Newtons Grundgesetz 185, 190
 Nullstellen 36
 Nutation 203
 Ohmsches Gesetz 215
 Optik 221 ff.
 Orthogonale Transformationen 79
 Orthogonaler Tensor 164
 Ortsvektor 159
 Parabolische Koordinaten 90
 Partialbruchzerlegung 16
 Partialdruck 251
 Partielle Differentialgleichungen 101, 126 ff.
 Partikuläre Lösungen 101
 Permeabilität 215
 Permutation 11
 Pfaßsche Gleichungen 124, 245
 Phasenraum 197
 Phasenregel 258
 Physikalische Komponenten 177
 Planetenbewegung 97, 194
 Polarisation 213
 Pole 40
 Polhodiekurve 201
 Potential 158
 Potentialgleichung 34, 130, 158

Potentiale, kinetische 219
 " retardierte 219
 Potential, thermodynamisches 247
 Potenzreihenentwicklung 36
 Poyntingscher Vektor 217, 236
 Präzession 202
 Quellenfreies Feld 158
 Randwertaufgaben 134
 Rang einer Matrix 7
 Rationale Funktionen 47
 Reguläre Präzession 202
 Reibungskoeffizient 209
 Reihen 25 ff., 54
 Reihenentwicklung, Integration durch 119
 Relaxationszeit 209
 Residuum 40
 Riccatische Differentialgleichung 105
 Riemanns Integrationsmethode 135
 Ritzsche Methode 144
 Rotation 155
 Säkulargleichung 5, 9
 Scherung 204
 Schraubung 200
 Schwankungen 148, 268
 Schwerpunkt 200
 Schwingungen 117, 198
 " erzwungene 117
 Schwingungsgleichung 131
 Selbstinduktionskoeffizient 218
 Separation der Variablen 102, 128
 Simultane Differentialgl. 121
 Singuläre Lösungen 101, 102
 " Punkte 34, 40, 44
 Skalar 152, 165
 Spannungen, elastische 205
 " Maxwellsche 217, 236
 Spannungstensor 205
 Spezifische Wärme 248
 Starrer Körper 199
 Statistische Mechanik 197
 " Wahrscheinlichkeit 198, 269
 Stefan-Boltzmannsches Gesetz 252
 Störingsche Formel 12
 Stohesscher Satz 155
 Störungsfunktion 96
 Strom, elektrischer 214
 Symbolische Schreibweise 107
 Taylorsche Reihe 29
 Telegraphengleichung 137

Temperatur 244, 246
 Tensor 152, 163 ff.
 Theta-Funktionen 75
 Totale Differentialgleichungen 126
 Trägheitsellipsoid 201
 Trägheitsmoment 200
 Transformationen 76 ff.
 Transformationsdeterminante 80
 Transformation von Vektoren 168, 173
 Transponierte Matrix 7
 Transzendente Funktionen 47, 50 ff.
 Trigonometrische Funktionen 51

Umwandlungswärme 257
 Underdeterminante 7

*Van der Waals*sche Formel 253
 Variation 11
 " der Konstanten 96, 116
 " -rechnung 142 ff.
 Vektor 33, 152 ff.
 Vektorpotential 158, 216
 Verjüngung 176
 Verteilungswahrscheinlichkeit 265
 Verzweigungspunkte 40

Virtuelle Verrückungen 186

Wahrscheinlichkeit 147, 198
 Wahrscheinlichkeitsnachwirkung 150
 Wärmemenge 245
 Wärmethorem, Nernstsches 259
 Wellen, elastische 208
 " elektrische 221
 Weltlinie 229
 Widerstand 214
 Winkelvariable 95, 263
 Wirbelfreies Feld 158
 Wirbellinie 161, 210
 Wirkungsfunktion 94, 193
 Wirkung, Prinzip der kleinsten 188
 Wirkungsquantum 263, 271

Zentrifugalkraft 190
 Zirkulante 10
 Zustandsgleichung 253
 " -integral 198
 " -variable 244, 247
 Zwang, Prinzip des kleinsten 186
 Zwangskräfte 195
 Zyklische Determinante 10
 Zylinderfunktionen 63

Druck von Oscar Brandstetter in Leipzig.

Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen

mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete

Gemeinsam mit

W. Blaschke, Hamburg, M. Born, Göttingen, C. Runge, Göttingen

herausgegeben von R. Courant, Göttingen

Bd. I: Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie. Von **Wilhelm Blaschke**, Professor der Mathematik an der Universität Hamburg. I. Elementare Differentialgeometrie. Zweite, verbesserte Auflage. Mit einem Anhang von Kurt Reidemeister, Professor der Mathematik an der Universität Wien. Mit 40 Textfiguren. (254 S.) 1924.

11 Goldmark; gebunden 12 Goldmark

Bd. II: Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen.

Von Dr. **Konrad Knopp**, ord. Professor der Mathematik an der Universität Königsberg. Zweite, erweiterte Auflage. Mit 12 Textfiguren. (536 S.) 1924.

27 Goldmark; gebunden 28 Goldmark

Bd. III: Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen. Von **Adolf Hurwitz**, weil. ord. Professor der Mathematik am Eidgenössischen Polytechnikum Zürich. Herausgegeben und ergänzt durch einen Abschnitt über:

Geometrische Funktionentheorie von **R. Courant**, ord. Professor der Mathematik an der Universität Göttingen. Zweite, vollständig umgearbeitete und vermehrte Auflage. Mit 128 Textfiguren. (508 S.) 1925.

23,40 Goldmark; gebunden 25 Goldmark

Bd. V: Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung mit Anwendungen auf algebraische Zahlen und Gleichungen sowie auf die Kristallographie. Von **Andreas Speiser**, ord. Professor der Mathematik an der Universität Zürich. (202 S.) 1923.

7 Goldmark

Bd. VI: Theorie der Differentialgleichungen. Vorlesungen aus dem Gesamtgebiet der gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen. Von **Ludwig Bieberbach**, d. 8. Professor der Mathematik an der Friedrich-Wilhelms-Universität in Berlin. Mit 19 Textfiguren. (327 S.) 1923.

10 Goldmark; gebunden 12 Goldmark

Bd. VII: Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie. Von **Wilhelm Blaschke**, Professor der Mathematik an der Universität Hamburg. II. Affine Differentialgeometrie. Bearbeitet von Kurt Reidemeister, Professor der Mathematik an der Universität Wien. Erste und zweite Auflage. Mit 40 Textfiguren. (268 S.) 1923. 8,50 Goldmark; gebunden 10 Goldmark

Bd. VIII: Vorlesungen über Topologie. Von **B. v. Kerékjártó**. I. Flächentopologie. Mit 60 Textfiguren. (277 S.) 1923.

11,50 Goldmark; gebunden 13 Goldmark

Bd. IX: Einleitung in die Mengenlehre. Eine elementare Einführung in das Reich des Unendlichgroßen. Von **Adolf Fraenkel**, a. o. Professor an der Universität Marburg. Zweite, erweiterte Auflage. Mit 13 Textfiguren. (259 S.) 1923.

10,80 Goldmark

Bd. X: Der Ricci-Kalkül. Eine Einführung in die neueren Methoden und Probleme der mehrdimensionalen Differentialgeometrie. Von **J. A. Schouten**, ord. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule Delft in Holland. Mit 7 Textfiguren. (321 S.) 1924.

15 Goldmark; gebunden 16,20 Goldmark

Siehe auch umstehende Seite.

Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in
Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete.
Gemeinsam mit W. Blaschke-Hamburg, M. Born-Göttingen, C. Runge-
Göttingen herausgegeben von R. Courant-Göttingen.

Bd. XI: Vorlesungen über numerisches Rechnen. Von
C. Runge, o. Professor der Mathematik an der Universität Göttingen, und
H. König, o. Professor der Mathematik an der Bergakademie Clausthal.
Mit 13 Abbildungen. (379 S.) 1924. 16.50 Goldmark; gebunden 17.70 Goldmark

Bd. XII: Methoden der mathematischen Physik. Erster Band.
Von R. Courant, ord. Professor der Mathematik an der Universität Göt-
tingen und D. Hilbert, Geh. Reg.-Rat, ord. Professor der Mathematik an
der Universität Göttingen. Mit 29 Abbildungen. (463 S.) 1924.
22.50 Goldmark; gebunden 24 Goldmark

Bd. XIII: Vorlesungen über Differenzenrechnung. Von Niels Erik
Nörlund, ord. Professor der Mathematik an der Universität Kopenhagen.
Mit 54 Textfiguren. (560 S.) 1924. 24 Goldmark; gebunden 25.20 Goldmark

Bd. XIV: Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus.
Von Felix Klein. Dritte Auflage. Erster Band: Arithmetik — Algebra —
Analysis. Ausgearbeitet von E. Hellinger. Für den Druck fertig ge-
macht und mit Zusätzen versehen von Fr. Seyfarth. Mit 125 Abbildungen.
(333 S.) 1924. 15 Goldmark; gebunden 16.50 Goldmark

Bd. XV: Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus.
Von Felix Klein. Dritte Auflage. Zweiter Band: Geometrie. Ausgearbeitet
von E. Hellinger. Für den Druck fertig gemacht und mit Zusätzen versehen
von Fr. Seyfarth. Mit 149 Abbildungen. Erscheint im August 1925.

Bd. XVI: Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus.
Von Felix Klein. Dritte Auflage. Dritter Band: Anwendung der
Differential- und Integralrechnung auf Geometrie. In Vorbereitung.

Bd. XVII: Analytische Dynamik der Punkte und starren Körper.
Mit einer Einführung in das Dreikörperproblem und mit zahlreichen Übungs-
aufgaben. Von E. T. Whittaker, Professor der Mathematik an der Universität
Edinburgh. Nach der zweiten Auflage übersetzt von Dr. F. und K. Mittelsten
Scheidt, Marburg a. d. Lahn. (474 S.) 1924. 21 Goldmark; geb. 22.50 Goldmark

Bd. XVIII: Relativitätstheorie in mathematischer Behandlung.
Von A. S. Eddington, Plumian Professor of Astronomy and experimental
Philosophy in the University of Cambridge. Autorisierte, mit Zusätzen und Er-
läuterungen versehene Übersetzung von Dr. Alexander Ostrowski, Privat-
dozent an der Universität Göttingen und Prof. Dr. Harry Schmidt, Dozent
am Friedrichs-Polytechnikum Cöthen. Mit einem Anhang: Eddingtons
Theorie und Hamiltonsches Prinzip von Albert Einstein. (391 S.)
1925. 18 Goldmark; gebunden 19.50 Goldmark

Bd. XIX: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis. Von
G. Pólya, Tit. Professor an der Eidgenössischen Technischen Hochschule
Zürich und G. Szegő, Privatdozent an der Friedrich-Wilhelms-Universität
Berlin. Erster Band: Reihen, Integralrechnung, Funktionen-
theorie. (354 S.) 1925. 15 Goldmark; gebunden 16.50 Goldmark

Bd. XX: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis. Von G. Pólya,
Tit. Professor an der Eidgen. Technischen Hochschule Zürich und G. Szegő,
Privatdozent an der Friedrich-Wilhelms-Universität Berlin. Zweiter Band:
Funktionentheorie, Nullstellen, Polynome, Determinanten,
Zahlentheorie. (417 S.) 1925. 18 Goldmark; gebunden 19.50 Goldmark

**d. XXI: Einführung in die analytische Geometrie der Ebene
und des Raumes.** Von A. Schoenflies, ord. Professor der Mathematik
an der Universität Frankfurt. Mit 83 Textfiguren. (314 S.) 1925.
15 Goldmark; gebunden 16.50 Goldmark

